

Projet 1

Rénovation du programme de chimie des classes préparatoires

Section Géologie et Biologie (BG)

1^{ère} année

Horaire d'enseignement / semaine: 2h $\frac{3}{4}$ C, $\frac{3}{4}$ h TD et 1h TP

(30 semaines: 15 semaines/semestre)

A- Chimie Générale et cristallographie

Thème	Chapitre	Horaire	Semestre
Atomistique (8 semaines)	I. Structure de l'atome	2 semaines	Premier (2h $\frac{3}{4}$ C & $\frac{3}{4}$ TD/ semaine)
	II. Tableau périodique	2 semaines	
	III. Liaisons chimiques et solvants	2 semaines	
	IV. Chimie de coordination	2 semaines	
Cristallographie (3 semaines)	V. Introduction à la cristallographie	0,5 semaine	
	VI. Cristaux métalliques et ioniques	2,5 semaines	
Thermodynamique Chimique I (4 semaines)	VII. Introduction à la thermodynamique	1 semaine	Second 1 h $\frac{1}{4}$ C & $\frac{1}{4}$ /semaine
	VIII. Premier principe de la thermodynamique et ses applications à la réaction chimique	3 semaines	
Thermodynamique Chimique II (5 semaines)	IX. Deuxième et troisième principes de la thermodynamique: Applications à la réaction chimique	5 semaines	
Cinétique Chimique (10 semaines)	X. Cinétique Chimique	10 semaines	

A- Chimie organique

Chimie organique (15 semaines)	I : Formules des composés organiques	1.5 semaines	Second
	II : Nomenclature systématique	1.5 semaines	
	III : Stéréoisomérisation	5 semaines	
	IV : Effets électroniques	3 semaines	
	V Méthodes spectroscopiques de détermination de structures des composés organiques	3 semaines	

Sommaire des Approches documentaires et TP	
Thème	Thématiques abordées
Atomistique	📎 Approche documentaire: Applications de la radioactivité en géologie et dans le domaine médical.
Cristallographie	📎 Approche documentaire: Corréler les propriétés des matériaux à la nature de la cohésion cristalline. ❑ TP: Assemblage compacts et identification d'un solide cristallin par DRX.
Thermodynamique Chimique	📎 Approche documentaire sur l'importance de la tabulation des bases des données thermodynamiques des grandeurs standards. ❑ TP: Détermination expérimentale de la chaleur de réaction par calorimétrie.
Cinétique chimique	📎 Approche documentaire: Détermination des dates limites de consommation de yaourt. ❑ TP : Etude cinétique : - Détermination de l'ordre d'une réaction chimique. - Détermination de l'énergie d'Arrhénius (Se limiter à des mesures à trois températures différentes : ambiante et deux autres).

Structure de la matière: Atomistique

Avant propos

Ce thème donne une description microscopique de la matière à l'aide de modèles simples pour la constitution des atomes, des ions et des molécules. La structure des molécules est envisagée sous le seul formalisme de Lewis, et leur géométrie dans le cadre du modèle de Gillespie. L'étude de la classification périodique des éléments est un outil essentiel de la chimie qui nous permet par la suite de tirer des informations, de prévoir la réactivité des corps simples et de déterminer la nature de la liaison chimique. L'étude des interactions intermoléculaires constitue essentiellement un support à l'interprétation des propriétés physico-chimiques.

Cette partie du programme, dont le contenu s'articule entre la modélisation (approche conceptuelle) et le réel (approche expérimentale), est une occasion à l'élève ingénieur pour apprendre à modéliser et à valider d'une manière autonome pour une meilleure compréhension des phénomènes chimiques, souvent complexes. La démarche documentaire avec différents outils permet de développer chez l'apprenant une meilleure maîtrise de l'information. Parmi les objectifs de cette approche, on peut citer : savoir rechercher (méthodologie), utiliser et traiter (réflexion) et communiquer l'information. Elle permet aussi à habituer l'étudiant à se cultiver et à être un apprenant à vie.

Annotations :

- ❖ : Commentaires
- : Compétences exigibles
- 📖 : Approche documentaire
- : Travaux pratiques

Chap. 1 : Structure de l'atome

Thématiques abordées	Capacités exigibles et Commentaires
1.1. Préambule	
✓ Préambule ✓ Atomes, isotopes, abondance isotopique et masse molaire. ✓ Ordres de grandeurs de la taille d'un atome et des masses ; charges de l'électron et du noyau (protons et neutrons). ✓ Principe de la fission. Radioactivité α, β^+, β^- et γ. Décroissance radioactive. ✓ Postulats de Bohr et les expressions des énergies et du rayon.	❖ Les structures de l'atome et du noyau ont été vues dans les classes antérieures ; elles sont rappelées sommairement. ❖ L'usage d'un vocabulaire précis est indispensable : élément, atome, corps simple, corps composé, corps pur, espèce chimique, entité chimique. ❖ Se limiter à rappeler le postulat. ❖ Les expressions de l'énergie et du rayon sont données sans démonstration. 📎 Approche documentaire: Applications de la radioactivité en géologie et dans le domaine médical.
1.2. Atome selon le modèle quantique	
1.2.1. Dualité onde-corpuscule.	❖ Les travaux de Planck, Einstein et De Broglie sont énoncés pour évoquer que la nature quantique de la matière entraîne l'équivalence entre des propriétés ondulatoires (fréquence et vecteur d'onde) et corpusculaires (énergie et impulsion) ❖ Le principe d'incertitude (ou principe d'indétermination) de Heisenberg est énoncé pour rappeler que, pour une particule massive donnée, on ne peut pas connaître simultanément sa position et sa vitesse avec une précision supérieure à un certain seuil. ❖ Le terme « incertitude » est le terme historique pour ce principe. Le nom de « théorème d'indétermination » est

	recommandé.
.2.2. Fonction d'onde (Ψ) de l'atome d'hydrogène.	❖ L'équation de Schrödinger décrit l'évolution dans le temps du comportement ondulatoire d'une particule massive non relativiste et notamment l'électron. Les solutions de cette équation (Ψ) permettent d'accéder à l'énergie de la particule considérée et à la probabilité de son existence dans un point de l'espace à un instant donné. ❖ La résolution mathématique est hors programme. On se limite à interpréter $\Psi ^2$ comme la densité de probabilité de présence d'un électron en un point.
1.2.3. Nombres quantiques orbitaux : n, l et m_l 1.2.4. Spin électronique (m_s ou s).	➤ Décrire l'état d'un électron (n, l, m_l et s).
1.2.5. Représentation graphique conventionnelle d'une orbitale atomique.	❖ On se contentera à la représentation des orbitales atomiques s, p et d, les expressions mathématiques des fonctions d'onde peuvent être données à titre indicatif.
1.2.6. Configuration électronique d'un atome : ✓ Règles de remplissage : - Principe d'exclusion de Pauli - Règle de Hund - Règle de Klechkowsky ✓ Electrons de cœur et électrons de valence.	❖ Pour les applications, les éléments traités doivent appartenir aux cinq 1^{ères} périodes. ➤ Déterminer, à l'aide des règles de remplissage la configuration électronique d'un atome à l'état fondamental. ➤ Connaître des exceptions à la règle de Klechkowsky, on se limitera aux anomalies associées aux orbitales d à

	moitié ou totalement remplies (Cr, Mo, Cu et Ag). ➤ Construire un schéma de remplissage des sous couches de valence et préciser le nombre des électrons de valence. ➤ Prévoir la formule et la configuration électronique des ions monoatomiques d'un élément.
2 semaines	

Chap. 2 : Tableau périodique

Thématiques abordées	Capacités exigibles et Commentaires
1. Architecture du tableau périodique : (Notions de : période, groupe, blocs et famille).	❖ Critères actuels de la classification (Z et électrons de valence). ➤ Localiser dans le tableau périodique les blocs : s, p, d et f et reconnaître les métaux des non métaux. ➤ Relier la position d'un élément dans le tableau périodique à sa configuration électronique et au nombre d'électrons de valence. Les éléments traités doivent appartenir aux cinq 1^{ères} périodes. ➤ Situer dans le tableau les familles suivantes : métaux alcalins, alcalino-terreux et métaux de transition, chalcogènes, halogènes et gaz nobles.
2. Propriétés des éléments : Définition et évolution ✓ Electronégativité. ✓ Energie de la 1^{ère} ionisation et étude des ionisations successives, ✓ Attachement électronique,	❖ Signaler la présence de plusieurs échelles d'électronégativité et se limiter à celles de Pauling et de Milleken. ➤ Comparer les propriétés des éléments selon leurs positions dans le tableau périodique et entre les familles

✓ Rayons atomique et ionique, ✓ Caractère oxydo-réducteur.	➤ Relier la polyvalence et la variabilité des degrés d'oxydation à la diversité dans la nature, tels que les matériaux à base de O et S d'un côté et N et P d'un autre côté - Repérer les éléments à pouvoir réducteurs (métaux) et ceux à pouvoir oxydant (<i>e.g.</i> Halogènes et chalcogènes).
2 semaines	

Chap. 3: Liaisons chimiques et solvants

Thématiques abordées	Capacités exigibles et Commentaires
1. Liaisons chimiques covalentes 1.1. Modèle de Lewis : ✓ Liaison covalente localisée ✓ Liaison covalente délocalisée : -Notions de mésomérie et formes limites	➤ Distinguer un édifice ionique polyatomique d'une molécule. ➤ Présentation du modèle de Lewis et de la règle de l'octet. ➤ Etablir un ou des schémas de Lewis pour une entité donnée. ➤ Identifier les écarts à la règle de l'octet. ❖ Identifier les formes limites de résonance à partir d'exemples simples (<i>e.g.</i> O₃, CO₃²⁻, SO₃).
1.2. Géométrie moléculaire, Modèle VSEPR	❖ Présentation de la règle de Gillespie (répulsion des paires d'électrons de la couche de valence). ➤ Identifier et présenter les structures de types AX_nE_p, avec : n+p = 2 à 6. ➤ Prévoir et interpréter les déformations angulaires (effets de l'électronégativité de l'atome central et des atomes périphériques, de la présence des doublets non liants et/ou de la liaison multiple) et leurs conséquences.

1.3. Polarité d'une molécule -Polarité de la liaison, - Moment dipolaire d'une molécule (molécules polaire et apolaire).	➤ Déterminer la direction et le sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison et d'une molécule. ➤ Relier la structure géométrique d'une molécule à l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent.
---	---

2.Solvant 2.1.Forces intermoléculaires - Interactions de Van der Waals (de Keesom, de Debye et de London). - Liaisons hydrogène inter- et intra-moléculaires. - Effet du type de liaison sur quelques propriétés physiques des corps purs liquide, telles que la température de vaporisation. .2.2. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique. .2.2.1.Définitions solvant-soluté-dissolution 2.2.2.Caractéristiques des solvants moléculaires. - Permittivité relative, - Solvants protique et aprotique	❖ Mise en évidence de la présence de forces intermoléculaires qui augmentent quand la distance inter-particules (atomes, molécules ou édifices ioniques) diminue au cours d'un refroidissement ou une compression. ❖ Les notions de la polarisabilité, des moments dipolaires, induit et instantané et les définitions des forces de Van der Waals sont données d'une manière succincte. ❖ Les expressions des énergies et leurs ordres de grandeurs sont donnés à titre indicatif ; elles ne sont pas à retenir. ➤ Corréler des propriétés physicochimiques à la nature des interactions intervenantes. - Permittivité relative, - Solvants protique et aprotique - Solvants polaire et apolaire,
---	---

- Solvants polaire et apolaire,	
.2.2.3. Solubilisation et solubilité.	➤ Interpréter la miscibilité ou la non-miscibilité de deux solvants. ➤ Justifier et proposer le choix d'un solvant adapté à la dissolution d'une espèce donnée.
2 semaines	

Chap.4: Chimie de coordination

Thématiques abordées	Capacités exigées et Commentaires
1. Définitions: ✓ Composés de coordination. ✓ Ligand (monodentale, polydentale). ✓ Liaison métal-ligand. ✓ Magnétisme des ions des métaux de transition et leurs complexes ✓ Nomenclature	Exemples à choisir dans la chimie du fer et du zinc. L'effet Jahn-Teller est hors programme. Les règles de Nomenclature de l'IUPAC doivent être connues
2. Structure idéale octaédrique et tétraédrique. ✓ Stéréochimie des complexes octaédriques.	
3. Théorie du champ cristallin: ✓ Présentation élémentaire de la levée de la dégénérescence dans le cas des complexes octaédriques. ✓ Applications au magnétisme (champ fort, champ faible) et aux spectres d'absorption par	On limitera les exemples à ceux du fer. Représenter les orbitales d et expliquer la levée partielle de la dégénérescence suite à l'interaction avec les ligands. Calculer l'énergie de stabilisation du champ cristallin et déterminer la configuration électronique . La couleur des complexes sera traitée sur l'exemple

transition électronique (couleur des complexes). ✓ Aspect énergétique : influence du ligand, influence de l'ion central, énergie de stabilisation du champ cristallin.	de l'Hexaaquatitane (III). Toute présentation dans le cadre de la théorie des groupes est hors programme
2 semaines	

Thème: Cristallographie

Avant propos

Il s'agit ici de donner un aperçu tout d'abord sur les états de la matière solide (amorphe et cristallisé) puis, sur la notion de transition polymorphique et son importance sur les propriétés. Ensuite, on passe à la description des structures d'édifices chimiques cristallins, en s'appuyant sur quelques exemples. Cette partie constitue une occasion pour relier la position d'un élément dans le tableau périodique et la nature des interactions des entités correspondantes dans le matériau solide. L'élève ingénieur doit être capable à la fin de cette partie de décrire un cristal parfait, de déterminer les paramètres de la maille en fonction du rayon métallique, masse volumique et compacité.

L'élève ingénieur doit nécessairement étudier la cristallographie puisque la plupart des connaissances des roches, de l'histoire de la Terre, les industries minière et géothermique que pour toutes les industries de forage à la recherche d'eau, de pétrole et de gaz, industries agroalimentaire, aéronautique, automobile, des soins de beauté, de l'informatique, électromécanique proviennent de la cristallographie.

Chap. 1 : Matière solide et cohésion cristalline

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
1. Etats solide de la matière - Etat solide cristallin - Etat solide amorphe - Comparaison de quelques propriétés macroscopiques de matériaux cristallisés et amorphes. 1. Classification des solides cristallisés : (Cohésion cristalline et propriétés) 2.1. Solide cristallisé métallique 2.2. Solide cristallisé ionique 2.3. Solide cristallisé covalent 2.4. Solide cristallisé moléculaire	➤ Relier des propriétés physiques à la structure microscopique (Notions d'isotropie et anisotropie) ➤ Allure de la courbe d'analyse thermique d'un solide cristallin (Palier isotherme/T de fusion) et celle d'un solide amorphe (point vitreux / T de vitrification). ❖ En ce qui concerne la cohésion cristalline, on se limite à une description succincte de la nature de la liaison (la théorie des bandes d'énergie n'est pas exigée). ➤ Corréler la nature des interactions, qui assurent la cohésion des édifices à leurs positions dans le tableau périodique ➤ Relier les caractéristiques de la liaison aux propriétés macroscopiques des matériaux telles que les conduction thermique et électrique, la dissolution, dureté, <i>etc.</i> 📎 Approche documentaire: Corréler les propriétés des matériaux à la nature de la cohésion cristalline.
0,5 semaine	

Chap. 2 : Introduction à la cristallographie et identification par diffraction des rayons X

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
I. Introduction à la cristallographie et identification par diffraction des rayons X	
- Cristal et Cristallographie - Structure, motifs, nœuds, réseau, maille, systèmes cristallins, modes de réseaux cristallins et réseaux de Bravais. - Nombre de groupements formulaires par maille (Z), multiplicité. -Coordinance. -Compacité, -Masse volumique.	❖ Cristal parfait : Arrangement régulier et périodique d'atomes, de molécules ou d'ions. ❖ La connaissance des 14 réseaux de Bravais n'est pas exigible. Seule la connaissance des caractéristiques géométriques des réseaux cubiques et hexagonale est exigible. ❖ La connaissance des vecteurs de translation permis des quatre modes de réseaux est exigible (F, I, P et à faces opposées centrées). ➤ Exprimer la valeur de la masse volumique d'un solide cristallin, à partir des données structurales.
II. Cristaux métalliques	
1. Assemblages compacts et pseudo-compacts 1.1. Description du modèle 1.2. Empilements compacts - Type ABA - Type ABC 1.3. Maille cubique à faces centrées compacte (cF) 1.4. Maille hexagonale compacte (h) 1.5. Cubique centré (cI)	❖ Modèle : Atome assimilé à une sphère rigide. ➤ Préciser la coordinance et identifier la maille ➤ Localiser les interstices entre les plans de densité maximale. ❖ L'étude de la structure hc est effectué, en se basant sur la maille élémentaire (prisme droit à base losange). ➤ Exprimer les paramètres de la maille cF et hc en fonction du rayon métallique. ➤ Représenter et décrire la maille cF, hc et cI. ➤ Calculer la population et la masse volumique. ❑ TP: Assemblage compacts et identification d'un solide cristallin par DRX.

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
III. Cristaux ioniques	
III.1. Introduction III. 1.1. Description du modèle d'un cristal ionique parfait III.1.2. Conditions de stabilité et prévision de la structure III.2.Cristaux ioniques parfaits ✓ Cristaux type CsCl ✓ Cristaux type NaCl	❖ Modèle de la structure ionique : l'ion est considéré en tant qu'une sphère rigide et les interactions entre les ions sont purement électrostatiques. ❖ Conditions de stabilité : Neutralité électrique et contact anion-cation. ❖ Etablissement de la corrélation entre le facteur r^+/r^- et la coordinence est exigible. ❖ Pour chaque type de structure, préciser: - La coordinence Anion/Cations et cation/Anions, le motif et le groupement formulaire et leurs nombres sont précisés. ➤ Représenter et décrire la maille.
2,5 semaines	

Thème: Thermodynamique

Avant propos

La thermodynamique est une science relativement récente (XIX^e siècle). Elle s'intéresse aux différentes formes d'énergies, en particulier, à la transformation chaleur/travail. Ses premiers développements datent des travaux de physicien Carnot (1824) sur les machines thermiques. Elle est donc dès le début l'expression d'un jumelage entre deux disciplines disjointes, à savoir la thermique et la mécanique. Bien qu'elle ne soit pas une nouvelle science, la thermodynamique s'est construite à partir de principes, en définissant ses lois et ses objets, qui traitent des transformations de l'énergie, sous toutes ses formes. Depuis, les domaines d'application de la thermodynamique se sont multipliés, de la physique (machine thermique, ...), à la biologie (fonctionnement des cellules, ...) et à la chimie (contrôle de rendement, régénération de l'énergie, ...).

La thermochimie et la thermodynamique de l'équilibre sont des disciplines essentielles pour l'ingénieur. Elles ont des applications dans tous les domaines industriels : tout réacteur ou industriel produit ou consomme de l'énergie et est le siège de transformations physico-chimiques. Ces dernières évoluent vers un état d'équilibre, qui peut être prédit et décrit par la thermodynamique.

De point de vue connaissance, à la fin de ce cours, l'élève ingénieur doit savoir :

- Maîtriser les notions fondamentales de la thermodynamique et utiliser avec précision le langage approprié ;
- Décrire l'évolution et les échanges énergétiques d'un système fermé en réaction chimique ;
- Définir l'état standard d'un constituant pur et les grandeurs molaires standard ; connaître l'influence de la température sur ces grandeurs ;
- Prévoir les échanges d'énergie entre le système et le milieu extérieur lors d'une transformation.

Chap. 1: Introduction à la thermodynamique

Thématiques abordées	Capacités exigibles et Commentaires
1- Définitions et notions générales - Thermodynamique - Système - Variables d'état - Equation d'état - Fonction d'état (Propriété mathématique) - Transformations - Système en équilibre / système en évolution - Phase, mélange et solution. - Etat physique - Systèmes homogène et hétérogène - Pression et concentration standard ; état standard d'un élément 2. Composition d'un système : - Fraction molaire (x_i si i est un gaz et y_i si i est un corps condensé), - Fraction massique (w_i), - Pression partielle (p_i si i est un gaz), - molalité (m_i, si i est un constituant dans un mélange), - Concentration molaire (c_i, si i est un soluté)	❖ Adopter les conventions actuelles de l'IUPAC ❖ Donner l'expression $pV = nRT$ (loi des gaz parfaits) en tant qu'un exemple d'équation d'état. ❖ La loi des gaz parfait peut être exploitée pour introduire la notion d'équation aux dimensions. ❖ Insister sur l'importance des systèmes d'unités et sur l'utilisation des unités dans le système international (S.I.). ❖ Propriétés mathématiques : Soit une fonction d'état F, qui dépend des variables d'état ($X, Y, z_1, \dots, z_j$), elle est continue sa différentielle est : $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{Y, z_j} dX + \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_{X, z_j} dY + \sum_1^j \left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)_{X, Y, z_{j \neq i}} dz_i$ ➤ Définir les transformations chimique, et physique, isochore, monotherme, monobare, isobare et isotherme. ➤ Définir les transformations réversible, irréversible et renversible. ➤ Différencier les systèmes : ouvert, fermé, isolé, homogène et hétérogène. ➤ Définir les variables d'état intensives (<i>e.g.</i> T, p, c_i, x_i et w_i) et extensives (<i>e.g.</i> n_i, V). ➤ Différencier une transformation physique d'une transformation chimique.
1 semaine	

**Chap. 2 : Premier principe de la thermodynamique
et ses applications à la réaction chimique**

Thématiques abordées	Capacités exigibles et Commentaires
1. Notions élémentaires de la thermodynamique	
1. Notions de chaleur et de travail 1.1. Convention de signe 2.2. Echange de chaleur 2.3. Echange de travail 2. Premier principe de la thermodynamique 2.1. Enoncé du premier principe - notion d'énergie interne U 2.2. Définition de l'enthalpie H 2.3. Lois de Joule - Thomson 2.4. Relation de Mayer 3. Applications du premier principe à la réaction chimique 3.1. Grandeurs de réaction - Avancement d'une réaction (ξ) - Grandeur de réaction ($\Delta_r X$). - Grandeurs standard de réaction ($\Delta_r X^\circ$) - Relation entre $\Delta_r H$ et $\Delta_r U$ et entre $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r U^\circ$. - Variation de $\Delta_r H^\circ(T)$ en fonction de la température ; sans changement d'état physique (Loi de Kirchhoff) et avec un changement d'état physique. 3.2. Grandeurs de formation d'un constituant - Définition et convention - Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$ d'un composé. - Application de la loi de Hess	❖ Adopter les conventions actuelles de l'IUPAC. ❖ On s'intéresse uniquement au travail volumique de compression et de décompression d'un gaz parfait ($\delta W = - p_{\text{ext}} dV$). ❖ $\xi = \frac{n_t(i) - n_0(i)}{\nu_i}$ ❖ $\Delta_r X = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{T,p}$ ➤ Différencier entre la variation d'une grandeur de la réaction (ΔX) et une grandeur de réaction ($\Delta_r X$). ➤ Utiliser la loi de Kirchhoff ➤ Utiliser la loi de Hess. ➤ Déterminer la température de flamme. ❖ La détermination de la température de flamme est à traiter en TD (cas d'une chambre de combustion).

3.3. Thermochimie de quelques transformations 3.3.1. Quelques réactions particulières : - Dissociation d'une liaison AB : Enthalpie standard de liaison ($\Delta_{diss}H_T^\circ(A-B)$) - Ionisation d'une espèce : Enthalpie standard d'ionisation ($\Delta_{ion}H^\circ$) - Attachement électronique d'une espèce Enthalpie standard d'attachement électronique ($\Delta_{att}H^\circ$), - Dissociation d'un solide ionique : Enthalpie réticulaire ($\Delta_{ret}H^\circ$). 3.3.2. Elaboration d'un cycle thermochimique	❖ Les notions avancées doivent être abordées en se basant sur des exemples simples. ➤ Elaborer un cycle thermodynamique. ➤ Déterminer l'enthalpie standard réticulaire d'un cristal ionique (cycle de Born-Haber).  Approche documentaire: Importance des bases des données thermodynamiques des grandeurs standard dans des applications industrielles. Le but est de montrer comment la collecte des grandeurs thermodynamiques de référence permet d'accéder à des grandeurs thermochimiques telles que les enthalpies standard de réaction nécessaires à la conception de procédés. ❑ TP : Détermination expérimentale de la chaleur de réaction par calorimétrie.
3 semaines	

Chap. 3: Deuxième et troisième principes de la thermodynamique

Applications à la thermochimie

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
1- Notion d'entropie (S) - Enoncé du 2^{ème} principe 2- Troisième principe de la thermodynamique - Enoncé du principe - Entropie absolue d'un corps pur à une température (T) donnée ($S^\circ(T)$) - Calcul de $S^\circ(T)$ à partir de $S^\circ(T_0)$ - Variation de l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ en fonction de la température. 3- Enthalpie de Gibbs et potentiel chimique. 3.1. Fonction enthalpie libre (G) - Définition - Expression de la différentielle de G pour un mélange à N constituants : ..., j, - Expression de l'enthalpie libre d'une réaction $\Delta_r G(T,p)$ en fonction de $\Delta_r H(T)$ et $\Delta_r S(T)$. - Expression de l'enthalpie libre standard ($\Delta_r G^\circ(T)$) d'une réaction en fonction de $\Delta_r H^\circ(T)$ et $\Delta_r S^\circ(T)$.	❖ Exprimer la variation de l'entropie d'un corps pur dans le cas : - de la variation de température - d'un changement d'état physique ($\Delta_{\text{fus}} S$, $\Delta_{\text{sub}} S$ et $\Delta_{\text{vap}} S$). ❖ Traiter le cas d'une transformation sans changement d'état physique et celui avec une transition d'état physique. ❖ Pour un mélange à N constituants : ..., j, ... $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,n_j} dP + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,n_j} dT + \sum_1^N \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_{j \neq i}} dn_i$ ❖ Etablir les conditions thermodynamiques de la spontanéité d'une transformation et de l'établissement d'un état d'équilibre dans un système fermé.
5 semaines	

Thème: Cinétique Chimique

Avant propos

L'objectif de cet enseignement est de permettre à l'étudiant d'acquérir les éléments de base de la cinétique, seule discipline basée exclusivement sur les données expérimentales indispensable à la maîtrise des techniques et méthodes d'étude de l'évolution temporelle d'un système chimique.

Cette science permet de manipuler la notion des temps associée à une réaction et d'explorer les mécanismes réactionnels.

À travers les Contenu et les capacités exigées, sont développées des compétences qui pourront être par la suite valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- modéliser ou simplifier un problème complexe ;
- utiliser différents outils graphique, numérique, analytique ;
- repérer les informations ou paramètres importants pour la résolution d'un problème.

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
-Introduction 1-Cinétique formelle 1.1 Notion de vitesses en cinétique chimique 1.1.1. Expressions des vitesses -Vitesse de formation (v_f) et vitesse de disparition d'une espèce chimique (v_d). -Vitesse moyenne. -Vitesse instantanée. -Vitesse de réaction. 1.1.2. Notion de temps de demi-réaction $t_{1/2}$ 1.2. Détermination expérimentale de l'ordre global et/ou des ordres partiels 1.3. Facteurs cinétiques	❖ Rappel de : - Relation entre la thermodynamique et la cinétique. - Processus rapide, lent et instantané. - Durée liée à une transformation donnée. - Avancement d'une réaction (définition et bilan de matière). ➤ Exprimer la vitesse de formation ou de disparition d'un constituant. ➤ Définir la vitesse volumique de réaction pour un système fermé ➤ Relier la vitesse volumique de réaction à la vitesse de formation ou à la vitesse de disparition d'un constituant. $v = k [A]^{m_A} [B]^{m_B}$ ❖ Pour les méthodes expérimentales : - Se limiter à une présentation brève de quelques méthodes chimiques (dosage volumétrique) et physiques (conductimétrie, mesure d'absorbance dans le visible, pH-métrie). - Citer les contraintes de ces méthodes. - Le principe et la procédure feront l'objet d'une séance de TP. ➤ Connaître les concepts nécessaires à l'étude cinétique d'une réaction chimique. ➤ Connaître les différents facteurs cinétiques. ❖ Rappeler les résultats de l'étude

1.4. Loi de vitesse - Ordre d'une réaction, - Constante de vitesse 1.5. Influence de la température sur les constantes de vitesse - Relation entre la constante de vitesse et la température : Loi empirique d'Arrhenius - Energie d'activation. - Complexe activé. - Profil énergétique Complexe activé. 1.6. Méthodes expérimentales de la détermination de l'ordre global et des ordres partiels pour une réaction simple. 1.6.1. Simplification de la loi de vitesse - Mélange non stœchiométrique : Méthode de dégénérescence de l'ordre - Mélange stœchiométrique : 1.6.2. Détermination des ordres partiels - Méthode intégrale - Méthode de temps de demi-réaction - Méthodes de vitesses initiales	qualitative des facteurs cinétiques (concentration, température et catalyseur). ❖ $V(t) = k [A]_t^{m_A} [B]_t^{m_B}$: avec : - ordre partiel par rapport à un réactif : donnée i : m_i (ou n_i), - ordre globale de la réaction : m (ou n), - k : constante de vitesse. ➤ Connaitre la loi d'Arrhenius et savoir l'utiliser. ❖ L'étude concerne des réactions de type : $a A + b B \rightarrow c C + d D$ - Lois de vitesse : $v = k [A]^{n_A} [B]^{m_B}$: équation à 3 inconnues : k, n_A et m_B - Les ordres m et n sont : 0, 1 ou 2. ❖ Notion de constante apparente de vitesse ❖ Loi de vitesse simplifiée. ❖ Permet de déterminer l'ordre de la réaction par rapport au réactif en défaut ❖ Permet de déterminer l'ordre global de la réaction ❖ Postuler un ordre et intégrer la loi de vitesse et exploiter cette loi sous forme de tracé d'une droite ou d'un calcul de la constante de vitesse à différents instants.
--	--

	❖ Etude de l'évolution de $t_{1/2}$ en fonction de C_0 et déduire l'ordre en se basant sur le profil de concentration (loi cinétique intégrée de vitesse). ❖ Détermination des vitesses initiales pour différentes concentrations initiales de A, puis traçage de : $\text{Ln}v_0 = f(\text{Ln}[A_0])$: si la loi de vitesse est simplifiée. ❖ Détermination des vitesses initiales pour différentes concentrations initiales de A et B puis calcul du rapport des vitesses initiales: si la loi de vitesse n'est pas simplifiée. ➤ Savoir exploiter des données expérimentales pour retrouver l'ordre d'une réaction, la constante de vitesse et l'énergie d'activation.
2. Cinétique des réactions complexes Lois et types des courbes cinétiques traduisant les réactions parallèles (jumelles) et successives.	❖ .Introduction à la notion de contrôle cinétique et thermodynamique. Approximation de l'état quasi-stationnaire AEQS (principe de Bodenstein) énoncé et conséquence
3. Etude des mécanismes réactionnels Description des mécanismes réactionnels. Types de mécanismes et expression de la loi vitesse de la réaction.) Cas d'un mécanisme réactionnel composé	Définitions d'un acte élémentaire. Propriétés des étapes élémentaires. Notion d'intermédiaire réactionnel (radicaux, ions positifs et négatifs.) et d'état de transition.

de réactions par stades (S_N1, S_EAr, S_NAr....). b) Cas d'un mécanisme réactionnel composé de réactions en chaîne (chaîne linéaire ou ramifiée). c) Cas d'une réaction de polymérisation (polymérisation anionique, cationique, 3. Notions élémentaires de la catalyse - Définition - Mode d'action d'un catalyseur. - Catalyse acide-base. - Notions sur la catalyse hétérogène. - Catalyse enzymatique à un seul substrat: Constante de Michaelis, vitesse maximale. 4. Cinétique en réacteur ouvert 5-1) Définitions : -Débits -Réacteur parfaitement agité continu RPAC -taux de conversion d'un réactif 5-2) Bilan de matière et vitesse -Cas général dn/dt régime permanent -Cas du RPAC .temps de passage -Cas d'une réaction avec ordre	Surface d'énergie potentielle (On présentera le diagramme énergie potentielle en fonction du coordnat de réaction). ❖ On se limite à citer un exemple de catalyse acido-basique et un exemple de catalyse enzymatique. Exprimer la vitesse de formation d'un réactif ou de formation d'un produit à l'aide d'un bilan de matière instantané. Etablir la loi de vitesse à partir des mesures fournies 📖 Approche documentaire: Détermination des dates limites de consommation de yaourt. ❑ TP : Etude cinétique : Détermination de l'ordre d'une réaction chimique et/ou Détermination de l'énergie d'Arrhénius (Se limiter à des mesures à trois températures différentes : ambiante et deux autres).
10 Semaines	

PROGRAMME CHIMIE ORGANIQUE

Avant propos

La chimie organique est présente dans les systèmes biologiques à travers les transformations que peuvent subir les molécules biologiques (acides aminés, glucides, lipides, acides nucléiques, ...). Dans cette partie, nous nous intéressons, dans un premier temps, à la description des molécules organiques aussi bien sur le plan constitution que tridimensionnel. Cette partie est fondamentale dans la mesure où elle permettra aux étudiants, entre autres, de bien suivre leur cours de biochimie. et de comprendre les mécanismes réactionnels qui seront enseignés en deuxième année.

Nous donnons également à ce niveau une introduction à la réactivité de certains groupes fonctionnels à travers l'étude des intermédiaires réactionnels (carbocation, carbanions et radicaux libres) mis en jeu lors des transformations. Nous mettons l'accent sur leurs modes de formation et sur l'influence des effets électroniques sur leurs stabilités.

Cet enseignement sera clôturé par les méthodes spectroscopiques de détermination de structure des composés organiques (IR et RMN ^1H). Les données spectroscopique aidera les étudiants à trancher entre des structures possibles d'un produit de synthèse.

Horaire total = 28 Heures (2 Heures x 14 semaines)

PROGRAMME	COMMENTAIRES
	CAPACITES EXIGIBLES
<u>Chapitre 1</u> : Formules des composés organique (2 H Cours + 1 H T.D) 1- Présentation de l'atome de carbone	➤ Retrouver une formule brute compatible avec les résultats de l'analyse qualitative et quantitative. ❖ On présente l'hybridation du carbone (sp^3) sur le méthane, (sp^2) sur l'éthylène et (sp) sur l'acétylène

2- Analyse élémentaire qualitative et quantitative 3- Formule brute et nombre d'insaturations 4- Formule de constitution : développée plane, semi-développée et topologique 5- Isomérisation de constitution (chaîne, fonction, position et tautomérie)	❖ Dans l'analyse qualitative on citer brièvement et à titre indicatif les méthodes (réactions) de détection de C, H, N, ... ❖ L'analyse quantitative doit être bien détaillée. ❖ Les techniques de détermination des masses molaires sont hors programme. ➤ Déterminer la relation d'isomérisation entre deux structures. ❖ On explique la tautomérie sur l'équilibre céto-énolique
Chapitre 2 : Nomenclature systématique en chimie organique (1 H 30 min Cours + 1 H T.D.) 1- Hydrocarbures acycliques (alcane, alcène et alcyne) 2- Hydrocarbures monocycliques 3- Composés monofonctionnels	➤ Utiliser le nom systématique d'un composé pour déterminer la formule de constitution et inversement ❖ La distribution de fascicules regroupant les règles de nomenclature est nécessaire. ❖ Les fonctions à étudier sont : acide carboxylique, ester, halogénure d'acide, amide, nitrile, aldéhyde, cétone, alcool, amine, éther-oxyde, dérivé halogéné.

4- composés à plusieurs fonctions	❖ Ces composés sont traités par ordre décroissant de priorité ❖ On donne le préfixe et suffixe relatif à chaque fonction.
<u>Chapitre 3</u> : Stéréoisomérisation en chimie organique (6 H Cours + 4 H T.D.) 1- Représentation spatiale : Représentation de Cram, projection de Newman et projection de Fischer 2- Stéréoisomérisation de conformation et de configuration 2a- Analyse conformationnelle : - Série linéaire - Série cyclohexanique : Cyclohexane, cyclohexane mono et disubstitué	➤ <i>Reconnaitre si deux molécules sont des conformères, des énantiomères ou des diastéréoisomères.</i> ❖ On donne les deux représentations syn- et anti-périplanaire (Cram). ❖ On définit la forme éclipsée et décalée (Newman) ➤ <i>Capable de discuter la stabilité relative de deux stéréoisomères de conformation.</i> - Encombrement stérique (Ethane et Butane et on présente leurs diagrammes énergétiques) ❖ Répulsion électrostatique (1,2-dibromoéthane) ❖ Liaison hydrogène (Ethane-1,2-diol) ❖ On présente la conformation chaise et bateau ainsi que l'équilibre conformationnel (cyclohexane) ❖ Pour le cyclohexane, on donne également la représentation de Haworth ❖ Règle de Barton (interactions 1,3-diaxiales)

2b- Isomérisation configurationnelle : - Isomérisation géométrique : Z/E (Composés éthyléniques) et Cis/Trans (Composés cycliques) - Isomérisation optique : - activité optique d'un composé possédant un seul carbone asymétrique (chiralité, énantiomères, configuration absolue R/S) - Notion de paire d'énantiomères et de paire de diastéréoisomères (composés à deux carbones asymétriques) 3- Activité optique en absence de carbone asymétrique 4- configuration relative (thréo/érythro et série D/L)	■ Approche documentaire : Les énantiomères et leurs activités biologiques. ❖ On donne les règles de CAHN, INGOLD et PRELOG (C.I.P.) ❖ Pour les dérivés du cyclohexane, on prend les deux modèles (Cram et perspective) ❖ On donne le principe de l'analyse polarimétrique (pouvoir rotatoire dextrogyre (<i>d</i> ou <i>+</i>) et lévogyre (<i>l</i> ou <i>-</i>)) ❖ Les composés possédant un carbone pseudo-asymétrique sont hors programme ❖ Notion d'un mélange racémique ❖ Forme méso (plan et centre de symétrie) ❖ On se limite au cas des allènes ❖ Ces notions seront appliquées à des composés biologiques (acides aminés et oses)
--	---

<u>Chapitre 4</u> : Effets électroniques (3 H Cours + 3 H T.D.) 1- Notion de polarisation d'une liaison 2- Effet Inductif donneur (+I) et attracteur (-I) 3- Effet Mésonère donneur (+M) et attracteur (-M)	➤ Capable de comparer l'acidité (ou la basicité) de deux espèces. ❖ Influence des effets électroniques sur l'acidité (acides carboxyliques) et sur la basicité (amines et alcoolates) ❖ Phénomène d'inversion parapluie, (comparaison de la basicité de l'ammoniac, la méthylamine, la diméthylamine et la triméthylamine)
<u>Chapitre 5</u> : Intermédiaires réactionnels (1 H Cours + 1 H T.D.) 1- Rupture de liaisons chimiques (rupture hétérolytique et homolytique) 2- Types de réactifs (nucléophiles, électrophiles et radicaux) 3- Intermédiaires réactionnels en chimie organique (carbanions, carbocations et radicaux carbonés)	➤ Comparer la réactivité relative de deux intermédiaires réactionnels. ❖ On présente les principaux modes de formation, leurs structures et leurs stabilités
<u>Chapitre 6</u> : Méthodes spectroscopiques de	

détermination de structure des composés organiques (2 H 30 min Cours + 2 H T.D.) 1- Spectroscopie Infra-Rouge (IR) * Phénomène d'absorption * Types de vibration * Lecture Spectre IR 2- Spectroscopie de Résonance Magnétique Nucléaire du proton (RMN ^1H) * Principe de la RMN * Notion de déplacement chimique * Couplage spin/spin * Spectre RMN ^1H et courbe d'intégration	❖ On donne les tables rassemblant les bandes d'absorption caractéristiques des principaux groupes fonctionnels ❖ Le principe de la RMN doit être bref et très simplifié (interaction moment magnétique / champ magnétique) ❖ Pour les couplages, on se limite aux ❖ Couplages du premier ordre A_mX_p. ❖ On donne également les tables rassemblant les déplacements chimiques.
---	---

Rénovation du programme de chimie des classes préparatoires

Section Géologie et Biologie (BG)

2^{ème} année

Horaire d'enseignement / semaine : 2h $\frac{3}{4}$ C, $\frac{3}{4}$ h TD et 1h TP

(28 semaines : 15/ 1^{er} semestre et 13/2^{ème} semestre)

A- Chimie Inorganique

Approche Thermodynamique et Chimie des solutions aqueuses

Sommaire			
Thème	Chapitre	Horaire	Semestre
thermodynamique (12,5 semaines)	I. Potentiel Chimique	2 semaines	Premier 2h $\frac{3}{4}$ C & $\frac{3}{4}$ h TD semaine)
	II. Propriétés colligatives	2 semaines	
	III. Les équilibres chimiques	3,5 semaines	
	IV. Diagrammes binaires d'équilibre de phases liquide-vapeur.	3 semaines	
	V. Diagrammes binaires d'équilibre isobare de phase solide-liquide.	2 semaines	
Chimie des solutions I (2,5 semaines)	VI. Les équilibres acido-basiques	2 semaines	
	VII. Les équilibres de complexation	0,5 semaine	
Chimie des solutions II (13 semaines)	VIII. Les équilibres de solubilité	5 semaines	Second (1 h $\frac{1}{4}$ C & $\frac{1}{4}$ h/ semaine
	IX. Les équilibres d'oxydoréduction	6 semaines	
	X. Lecture et exploitation des diagrammes potentiel-pH	2 semaines	

A- Chimie Organique

Thème	Chapitre	Horaire	Semestre
Introduction à la réactivité (1,5 semaine)	1. Les intermédiaires réactionnels	1,5 semaine	Second 2 h / semaine (Org)
Les Hydrocarbures (4 semaines)	2. Les alcènes	2 semaines	
	3. Les alcynes	0,5 semaines	
	4. Les composés aromatiques	1,5 semaine	
Les dérivés halogénés (4 semaines)	5. Les halogénures d'alkyles	3 semaines	
	6. Les organomagnésiens	1 semaine	
Les composés oxygénés (3,5 semaines)	7. Les alcools	1 semaine	
	8. Les dérivés carbonylés	1,5 semaine	

	9. Les acides carboxyliques et leurs dérivés	1 semaine	
--	--	-----------	--

Sommaire des Approches documentaires et TP	
Thème	Thématiques abordées
Thermodynamique Chimique: -Propriétés colligatives -Diagrammes binaires d'équilibre de phases liquide-vapeur. -Diagrammes binaires d'équilibre isobare de phase solide-liquide.	🔗 Approche documentaire: Applications de la pression osmotique dans le vivant. ❑ TP : Construction expérimentale d'un diagramme de phases liquide-vapeur d'un système binaire. TP : Diagramme de phases d'un système binaire liquide-solide : Construction expérimentale moyennant les courbes d'analyse thermique 🔗 Approche documentaire sur l'usage des diagrammes d'équilibre liquide-solide pour l'élaboration des métaux et alliages.
Chimie des solutions: Equilibres acido-basiques - Equilibres de complexation - Equilibres de solubilité - Equilibres d'oxydoréduction	❑ TP : Titrages acido-basiques: Titration volumétrique suivie simultanément par le virage d'un indicateur coloré et par pH-métrie. ❑ TP : Solutions tampons: Définition, préparation et composition, notion du pouvoir tampon et intérêt. ❑ TP : Détermination de la constante de dissociation d'un complexe (exp $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$) ❑ TP : Détermination expérimentale de la solubilité de substances ionique: Effet de la nature du cation (ou de l'anion), effet de la température et/ou effet du pH. ❑ TP: Titrages redox volumétrique et potentiométrique.

Thermodynamique

Le programme est développé en relation avec le programme de thermodynamique physique sur les changements d'états et celui de la thermodynamique chimique étudiés en première année.

L'objectif de l'enseignement de ce thème est de faire prendre conscience aux étudiants que la chimie participe au développement des sciences et débouche sur d'importantes réalisations industrielles. Chaque fois que cela est possible, des applications pratiques des notions abordées sont présentées, principalement, en approche documentaire.

De point de vue connaissance, à la fin de ce de ce thème, l'élève ingénieur doit savoir :

- Définir le potentiel chimique et l'exprimer.
- Etudier les propriétés colligatives.
- Prévoir l'évolution d'un équilibre chimique.
- Différencier un système idéal d'un système réel et utiliser les relations thermodynamiques correspondantes à un système idéal.
- Exploiter des diagrammes binaires.

Chap.1. Potentiel Chimique

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
1. Potentiel chimique : 1.1. Définition : - Expression du potentiel chimique d'une substance 'i' dans un mélange contenant N constituants : ..., j, - Cas particulier d'un corps pur (i) 1.2. Expressions de potentiel chimique d'un constituant (μ_i) et notion d'activité chimique (relative) 1.2.1. Expression générale - Gaz parfait pur ($\mu_i^*(g, T, p)$) - Gaz dans un mélange de gaz parfaits ($\mu_i(g, T, p_B)$) - Corps condensé pur ($\mu_i^*(cd, T, p)$) 1.2.2. Cas particulier d'un soluté (B) dans une solution infiniment diluée et idéale d'un solvant A 1.3. Identité d'Euler 1.4. Application à la réaction chimique - Enthalpie libre de réaction	❖ Parmi les expressions, du potentiel chimique d'un constituant 'i' donné, on se limite à celle, qui dépend des deux variables physiques d'état T et p : l'enthalpie libre molaire partielle. Son expression est déduite de l'expression de la différentielle de l'enthalpie libre (dG) : $\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right) T, p, n_{j \neq i}$ ❖ Préciser que ($\mu_i(z, T, p)$) est une grandeur intensive caractéristique d'un constituant donné, à l'état physique z, dans un mélange défini. Elle dépend, en plus de T et p, de la composition (d'où la terminologie partielle). ❖ Potentiel chimique d'un Corps pur i est l'enthalpie libre molaire : $\mu_i^* = G^*/n_i$ ❖ Dans chaque cas, l'état standard est décrit et l'activité est énoncée ; son établissement est hors programme. ❖ $\mu_i(z, T, p) = \mu_i^\circ(z, T) + RT \log a_i$ avec : - μ_i° est le potentiel standard du constituant i dans la phase z : i pur sous $p^\circ = 10^5 \text{ Pa}$, - a_i est l'activité de i dans z. ❖ $\mu_B(T, p, c_B) = \mu_{B\infty}^\circ(T) + RT \log (c_B/c^\circ)$ avec, $\mu_{B\infty}^\circ(T)$ est le potentiel standard de B ; il correspond à un état hypothétique où B est à la concentration $c^\circ = 1 \text{ mol. L}^{-1}$, dans une solution du solvant A, considérée idéale et infiniment (∞) diluée, sous la pression standard (p°).

($\Delta_r G(T)$), affinité chimique (A) et critères de spontanéité. - Expression de l'enthalpie libre d'une réaction $\Delta_r G(T,p)$ en fonction de $\Delta_r H(T)$ et $\Delta_r S(T)$. - Expression de l'enthalpie libre standard ($\Delta_r G^\circ(T)$) d'une réaction en fonction de $\Delta_r H^\circ(T)$ et $\Delta_r S^\circ(T)$. - Expression $\Delta_r G(T,p)$ en fonction des potentiels chimiques. - Expression $\Delta_r G^\circ(T)$ en fonction des potentiels chimiques standards. - Expression $\Delta_r G^\circ(T)$ d'une réaction en fonction des enthalpies libre standard de formation. 1.5. Notion d'activité et de coefficient d'activité. 1.6. Loi de Raoult et Henry	❖ Pour un mélange à N constituants : $G_{\text{syst}} = \sum_1^N n_i \mu_i$ ❖ Etablir les conditions thermodynamiques de la spontanéité d'une transformation et de l'établissement d'un état d'équilibre dans un système fermé. ❖ Les notions d'activité et de coefficient d'activité sont présentées dans le cadre de l'étude de l'équilibre liquide vapeur des mélanges binaires d'espèces moléculaires. ❖ Les lois de Raoult et Henry sont présentées comme des résultats expérimentaux.
2 semaines	

Chap. 2: Propriétés colligatives

Contenu	Capacités exigibles et Commentaires
- Pression osmotique - Cryométrie et ébulliométrie	A l'occasion de ce paragraphe, on utilisera le potentiel chimique. 📖 Approche documentaire: Applications de la pression osmotique dans le vivant.
2 semaines	

Chap. 3: Les équilibres chimiques

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
1. Lois d'action de masse et constante d'équilibre - Relation entre $\Delta_r G^\circ(T)$ et $K^\circ(T)$. - Variation de la constante d'équilibre avec la température : Loi de Vant' Hoff. 2- Variance d'un système - Définition - Calcul de la variance (Règle des phases)	❖ La règle des phases pour le calcul de la variance (F) est donnée, sans démonstration : $F = C + 2 - \phi - k - r$; avec, C : nombre de constituant(s) chimique(s), 2 : facteurs physiques d'équilibre (p et T), ϕ : nombre de phase(s), k : nombre d'équilibre(s) chimique(s) linéairement indépendants et r : nombre de relation(s) imposée(s) entre des facteurs d'équilibre de composition. ❖ Le calcul de la variance est effectué pour des systèmes homogènes et hétérogènes en équilibre. ❖ Ne pas traiter le cas des solutions ioniques. ❖ La notion de la variance réduite est introduite.
5. Lois de déplacements des équilibres - Effet de la température pour un système fermé, - Effet de la pression totale. - Effet de l'ajout d'un constituant actif gazeux et de celui d'un soluté. - Effet de l'introduction d'un gaz inerte.	➤ Calculer la variance dans le cas d'un équilibre chimique sans et avec une relation particulière et en présence ou non de gaz inerte. ➤ Déterminer et identifier les facteurs qui régissent un état d'équilibre. ➤ Justifier, brièvement, les effets de la variation de ces paramètres sur l'évolution de l'équilibre. ❖ Dans le cas d'un constituant gazeux actif ou inerte, étudier les effets à T et V constants et à T et p constantes
3,5 semaines	

Chap. 4: Diagrammes binaires d'équilibre de phases liquide-vapeur

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
I – Généralités et définitions II – Miscibilité totale à l'état liquide II.1. Cas d'un mélange liquide idéal II.1.1. Diagramme isotherme : $p = f(\text{composition})$ II.1.1.1. Expressions des potentiels chimiques II.1.1.2. Construction théorique et indexation du diagramme II.1.2. Diagramme isobare : $T = f(\text{composition})$ II.1.2.1. Allure et Indexation II.1.2.2. Courbes d'analyse thermique. II.1.3. Règle des segments inverses II.1.4. Application : Distillation fractionnée. II.2. Cas de mélanges réels II.2.1. Faible écart à l'idéalité. II.2.2. Ecart important à l'idéalité (azéotropie) : - Déviation positive par rapport à la loi de Raoult, ($\Delta_{\text{mel}}H > 0$, endothermique). - Déviation négative par rapport à la	❖ Les gaz sont supposés parfaits, les gaz réels sont hors programme. ❖ Certaines notions déjà introduites en 1^{ère} année sont à rappeler brièvement (Calcul de la variance, vaporisation d'un système, tension de vapeur saturante, fraction molaire et fraction massique). ❖ Les équations de la courbe de vaporisation (d'ébullition si $p = p^\circ$) et de rosée sont à établir dans le cas des diagrammes isothermes de mélanges liquides idéaux. ➤ Etablir l'équation de la courbe de vaporisation isotherme et celle de la courbe de rosée isotherme. ❖ L'allure de la courbe d'analyse thermique est établie en se basant sur les valeurs de la variance. ❖ La règle des segments inverses est à établir. ❖ La détermination du nombre de plateaux est hors programme. ❖ Donner l'allure des diagrammes dans le cas des solutions réelles. L'écart par rapport aux deux lois limites (lois de Raoult et lois d'Henry) seront présentées. ➤ Déterminer la nature du distillat et de résidu. ➤ Définir un mélange azéotrope. ❖ Approche expérimentale : corrélation entre

loi de Raoult, ($\Delta_{\text{mel}}H < 0$, exothermique). - Caractéristiques du mélange azéotrope. III. Miscibilité partielle à l'état liquide : Diagramme isobare de démixtion III.1. Allure d'un diagramme en absence d'interférence liquide-vapeur. III.2. Allure d'un diagramme avec une interférence liquide – vapeur (Palier hétéroazéotrope). IV. Miscibilité nulle à l'état liquide	les courbes d'analyses thermiques et les diagrammes binaires. ➤ <u>Pour tous les diagrammes :</u> - Indexer, lire et exploiter un diagramme d'équilibre de phase des systèmes binaires. - Déterminer la composition d'un système biphasé en équilibre - Tracer les courbes d'analyse thermique à partir d'un diagramme d'équilibre de phases isobare d'un système binaire. - Appliquer la règle des segments inverses. TP : Construction expérimentale d'un diagramme de phases liquide-vapeur d'un système binaire.
3 semaines	

Chap. 5: Diagrammes binaires d'équilibre isobare de phase solide-liquide

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
I. Miscibilité totale à l'état solide I.1. Conditions d'existence I.2. Allures des diagrammes I.3. Applications pour la purification - Technique de la cristallisation fractionnée - Méthode de la zone fondue II. Miscibilité partielle à l'état solide (Eutexie et Péritectie) III. Miscibilité nulle à l'état solide	❖ On se limitera à l'étude des diagrammes solide-liquide dans le cas d'une miscibilité totale à l'état liquide. ❖ Les diagrammes de phases qui présentent des transitions polymorphiques sont hors programme. ❖ Les applications données doivent être corrélées aux diagrammes étudiés, à titre d'exemples : - Diagramme NaCl-H₂O : Usage de NaCl pour

(Eutexie et Péritexie) IV. Composés intermédiaires définis à fusion congruente et à fusion non congruente.	faire fondre le verglas à $T < 273 \text{ K}$; - Diagramme Pb-Sn : Soudure du Pb à $T < T_{\text{fus}}^{\circ}$ ❖ L'eutectoïde et le péritectoïde sont hors programme. ❖ Ne pas traiter le cas des composés intermédiaires non définis. ❑ TP : Diagramme de phases d'un système binaire liquide-solide : Construction expérimentale moyennant les courbes d'analyse thermique 🔗 Approche documentaire sur l'usage des diagrammes d'équilibre liquide-solide pour l'élaboration des métaux et alliages.
1,5 semaines	

Avant propos

Les transformations chimiques en solution aqueuse jouent un rôle essentiel en chimie, en biochimie et dans les processus environnementaux.

Un nombre considérable de développements technologiques (générateurs électrochimiques, lutte contre la corrosion, traitement des eaux, méthodes d'analyse...) repose sur des phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse. L'influence du milieu (pH, présence ou non de complexants, possibilité de formation de composés insolubles...) est primordiale dans la compréhension et la prévision des phénomènes mis en jeu.

Objectif :

L'objectif de cette partie est donc de présenter les différents types de réactions susceptibles d'intervenir en solution aqueuse, d'en déduire des diagrammes de prédominance ou d'existence d'espèces chimiques, notamment des diagrammes potentiel-pH, et de l'utiliser comme outil de prévision et d'interprétation des transformations chimiques quel que soit le milieu donné. Les conventions de tracé seront toujours précisées.

S'appuyant sur les notions de couple redox et de pile rencontrées dans le secondaire, l'étude des phénomènes d'oxydo-réduction en solution aqueuse est complétée par l'utilisation de la relation de Nernst et de la relation entre la constante thermodynamique d'équilibre d'une réaction d'oxydo-réduction et les potentiels standard.

Afin de pouvoir étudier l'influence du milieu sur les espèces oxydantes ou réductrices effectivement présentes, les connaissances sur les réactions acido-basiques en solution aqueuse acquises dans le secondaire sont réinvesties et complétées, puis les complexes sont introduits au travers de leurs réactions de formation et de dissociation.

Compte tenu des différentes conventions existantes, l'équation de la réaction correspondante est donnée dans chaque cas. Enfin, les phénomènes de précipitation et de dissolution, ainsi que la condition de saturation d'une solution aqueuse sont présentés.

En travaux pratique Les choix pédagogiques relatifs au contenu des séances de travail expérimental permettront de contextualiser ces enseignements.

Les dosages par titrage sont étudiés exclusivement en travaux pratiques. L'analyse des conditions choisies ou la réflexion conduisant à une proposition de protocole expérimental pour atteindre un objectif donné constituent des mises en situation des enseignements évoqués

précédemment. La compréhension des phénomènes mis en jeu dans les titrages est par ailleurs un outil pour l'écriture de la réaction prépondérante. Ces séances de travail expérimental constituent une nouvelle occasion d'aborder qualité et précision de la mesure.

À travers les contenus et les capacités exigées, sont développées des compétences qui pourront être par la suite valorisées, consolidées ou réinvesties, parmi lesquelles :

- modéliser ou simplifier un problème complexe ;
- utiliser différents outils graphique, numérique, analytique ;
- repérer les informations ou paramètres importants pour la résolution d'un problème.

Chap. 6 : Equilibres acido-basiques

Thématiques abordées	Capacités exigibles et Commentaires
1. Electrolytes en milieu aqueux	❖ Définir la force des électrolytes et donner des exemples d'électrolytes forts et faibles (le coefficient de dissociation d'un électrolyte est à rappeler).
2. Loi de dilution d'Ostwald	❖ La loi d'Ostwald est énoncée. Sa démonstration et son commentaire sont effectués sur des exemples.
3. Définitions des acides et des bases selon la théorie de Brønsted	❖ Rappeler les définitions des constantes d'acidité (K_a) et de basicité (K_b) des acides et des bases faibles, ainsi que la relation entre K_a et K_b d'un acide et de sa base conjuguée.
4. Force des acides et des bases	❖ Traiter les cas d'un mono- et d'un diacide ainsi que de la constante de dissociation de l'eau (K_w).
5. Présentation de diagramme de distribution et de prédominance des espèces selon le pH	➤ Utiliser des diagrammes de distribution et de prédominance des espèces selon le pH.
6. Calcul du pH des solutions aqueuses par la méthode de la réaction prépondérante	➤ Déterminer le pH, par la méthode de la réaction prépondérante, parmi les cas suivants : monoacide, diacide et monobase forts et faibles.
7. Prévision des réactions acido-basiques	➤ Prévoir à l'aide d'une échelle des pK_a (règle gamma : γ) la réactivité acido-basique.
	❑ TP : Titrages acido-basiques: Titrage volumétrique suivi simultanément par le virage d'un indicateur coloré et par pH-métrie.
	❑ TP : Solutions tampons: Définition, préparation et composition, notion du pouvoir tampon et intérêt.
2 semaines	

Chap. 7: Equilibres de complexation

Thématiques abordées	Capacités exigibles et commentaires
1. Généralités sur les complexes 2. Réactions de formation ou de dissociation des complexes : - Constantes de formation et de dissociation d'un complexe (K_f et K_D), - Constante de stabilité d'état d'un complexe (β). 3. Diagramme de prédominance	❖ La définition, la nomenclature et les propriétés des complexes sont données d'une manière succincte. ❖ Se limiter à une réaction contenant un seul complexe. ➤ Exprimer K_f et β . ➤ Utiliser le diagramme de prédominance pour prévoir le déplacement de l'équilibre. ☐ TP : Détermination de la constante de dissociation d'un complexe (exp $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$
0,5 semaines	

Chapitre 8: Equilibres de solubilité

Contenus	Capacités exigibles et Commentaires
1. Définitions du produit de solubilité et de la solubilité d'un composé solide. 2. Conditions de précipitation. 3. Déplacement de l'équilibre de solubilité. - Effet de la température - Effet d'ion commun. - Effet du pH. - Influence de la formation d'un complexe.	➤ Etablir la relation entre la solubilité et le produit de solubilité ➤ Prévoir le déplacement de l'équilibre de solubilité sous l'effet de la variation de T, du changement du pH, en absence et avec la formation d'un complexe et/ou la présence d'un ion commun. ☐ TP : Détermination expérimentale de la solubilité de substances ionique : Effet de la nature du cation (ou de l'anion), effet de la température et/ou effet du pH.
5 semaines	

Chap. 9: Equilibres d'oxydoréduction

Thématiques abordées	Capacités exigibles et Commentaires
1. Définitions - Echange d'électrons - Nombre d'oxydation d'un élément - Réactions d'oxydoréduction 2. Réaction électrochimique et travail électrique 2.1. Etude d'une pile 2.2. Aspect thermodynamique des réactions électrochimiques 2.3. Potentiel d'électrode : Relation de Nernst 3. Calcul d'un potentiel standard inconnu (Relations entre les potentiels standard E° de divers couples d'un même élément chimique).	➤ Définir : oxydant, réducteur, oxydation, réduction et nombre d'oxydation. ➤ Equilibrer les réactions d'oxydoréduction. ➤ Représenter décrire et symboliser une pile. ➤ Définir la force électromotrice d'une cellule électrochimique et écrire la relation de Nernst. ➤ Prévoir le déplacement d'un équilibre d'oxydo-réduction (application de la règle γ) ➤ Déterminer le potentiel standard à partir des données thermodynamiques. ☐ TP: Titrages redox volumétrique et potentiométrique.
6 semaines	

Thème : Diagrammes potentiel-pH

Horaire globale allouée : 2 semaines.

Avant propos

Objectif :

L'objectif de cette partie est de comprendre et de prévoir rapidement comment les propriétés redox d'un couple peuvent être modifiées par un changement d'acidité du milieu, d'autre part une simple lecture du diagramme ou une superposition des diagrammes de deux éléments différents permet de savoir si ces espèces peuvent ou non réagir ensemble par un processus favorable.

Chap. 10: Lecture et exploitation des diagrammes potentiel-pH

Notions et contenus	Capacités exigibles et Commentaires
I. Principe de construction I.1. Frontières entre deux domaines - Notion de frontière I.2. Convention de tracé - Première convention - Seconde convention II. Construction II.1. Diagramme E-pH du Zinc II.2. Diagramme E-pH de l'eau II.3. Exploitation - Domaines d'immunité, de corrosion et de passivation. - Exploitation topologique d'un diagramme E-pH. - Possibilité de la dismutation. III. Limites des diagrammes E-pH Etude de la stabilité de l'espèce MnO_4^- dans l'eau (blocage cinétique).	❖ Frontières horizontale, verticale et oblique. ❖ Convention dite molaire ❖ Convention dite atomique ❖ La construction d'un diagramme avec dismutation n'est pas exigible ❖ Se limiter aux espèces suivantes : Zn_s, Zn^{2+}, $\text{Zn}(\text{OH})_2$ et $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$ ➤ Construire, indexer un diagramme E-pH. ➤ Prévoir la réactivité d'un métal en milieu aqueux et en présence d'oxyde(s) d'un autre métal. ❖ Superposition des deux diagrammes du manganèse et de l'eau. ❖ La lecture d'un diagramme avec dismutation et son exploitation est exigible (A traiter en TD le diagramme E-pH du cuivre ou autre).
2 semaines	

PROGRAMME CHIMIE ORGANIQUE

Avant propos

Les transformations chimiques en biologie suivent les mêmes mécanismes que celles effectuées par un chimiste organicien. Seules les conditions opératoires (température, solvant, catalyseur) sont différents. Nous nous proposons dans le présent enseignement de fournir aux étudiants un apprentissage de l'essentiel des mécanismes réactionnels à travers l'étude de la réactivité des principales fonctions chimiques.

Horaire total = 28 Heures (2H x14 semaines)

PROGRAMME	COMMENTAIRES CAPACITES EXIGIBLES
<u>Chapitre 1</u> : Les alcènes (3 H Cours + 2 H T.D.) 1- Réactions d'addition - Additions électrophiles : HX, H ₂ O et Br ₂ - Additions radicalaires : HX (effet Karash) - Additions concertées : H ₂ et BH ₃ 2- Réactions d'oxydation - Oxydation forte : Ozonolyse et KMnO ₄ concentré - Oxydation ménagée :	 ➤ <i>Maîtriser les flèches courbes pour décrire un mécanisme.</i> ➤ <i>Reconnaitre une réaction régiosélective (règle de Markovnikov) et une réaction stéréospécifique (syn- et anti-addition).</i> ❖ On détaille tous les mécanismes mis en jeu ❖ Pour l'hydrogénation, on se limite au catalyse hétérogène (cat. : Pt, Ni et Pd) ❖ Dans les réactions de coupure oxydante, seul le mécanisme simplifié de l'ozonolyse (passage par l'ozonide) est donné ❖ Pour l'hydrolyse des époxydes, on se limite au cas de milieu basique ➤ <i>Régiosélectivité et stéréospécificité de l'ouverture de l'époxyde par l'ion</i>

KMnO₄ dilué et peracides 4- Test caractéristique des composés éthyléniques	hydroxyde. ❖ Test à l'eau de brome
Chapitre 2 : Les alcynes (0 H30 min Cours + 0 H 30 min T.D.) 1- Réaction d'addition : - Hydrogénation catalytique : Complète et partielle - Hydratation 2- Réaction spécifique de l'alcyne vrai 3- Tests caractéristiques des alcynes	❖ On donne le mécanisme simplifié de l'hydratation acide (passage par une forme énolique). ➤ Caractère nucléophile de l'ion acétylure correspondant ❖ Tests au nitrate d'argent ammoniacal et au chlorure cuivreux ammoniacal.
Chapitre 3 : Le benzène et ses dérivés (2 H Cours + 1 H T.D.) 1- Mécanisme général de la S_E 2- Monosubstitution du benzène : réactions de nitration réaction d'halogénéation réaction d'alkylation et d'acylation (réaction	❖ On présente le complexe π et σ ❖ On donne les modes d'obtention de l'électrophile correspondant (dans l'alkylation on donne un exemple de réarrangement de carbocation) ❖ L'acylation suivie d'une réduction est une alternative pour obtenir les dérivés n-alkylés (donner uniquement les réactifs des réactions de réduction de Clemmensen et de Wolf-Kishner)

de FRIEDEL et CRAFTS) réaction de sulfonation 3- Substitution du benzène monosubstitué - Règles de Holleman * Groupes méta-directeurs * Groupes ortho/para-directeurs	❖ On présente le phénomène d'hyper-conjugaison (cas du toluène par exemple)
Chapitre 4 : Les dérivés halogénés (3 H Cours + 2 H T.D.) 1- Réactions de substitution nucléophile : S_N1 et S_N2 2- Réactions d'élimination : E1 et E2 3- Compétition substitution / élimination 4- Réaction d'insertion : Préparation d'organomagnésiens.	➤ Retrouver le type du mécanisme à partir des données expérimentales (cinétiques et stéréochimiques). ❖ Détailler les deux processus de la réaction. ❖ Facteurs à étudier : la cinétique, la stéréochimie, l'effet de solvant, la structure du substrat, nature du nucléophile. ❖ Dans S_N1, on montre, sur un exemple, le réarrangement de carbocation (mésomérie et transposition). ❖ Dans S_N2, on évoque l'inversion de Walden. ❖ Notion de régiosélectivité (règle de Saitzeff) ❖ Donner des exemples d'élimination anti-Saitzeff (base encombrée, élimination d'hoffmann). ❖ Préparation d'alcynes par double déshydrobromation de dérivés 1,2-dibromés obtenus par bromation d'alcènes. ❖ Donner juste le bilan de la réaction, le détail et la réactivité seront traités dans le chapitre suivant.

Chapitre 5 : Les organomagnésiens (1 H Cours + 2 H T.D.) 1- Mode d'obtention à partir de dérivés halogénés. 2- Réactions d'addition nucléophile : cétones et aldéhydes, les dérivés d'acide (halogénures d'acide, esters et amide) et le gaz carbonique	➤ Utilisation des organomagnésiens pour créer de nouvelles liaisons C-C à partir des groupes C=O. ❖ Insister sur les conditions expérimentales ❖ Détailler le mécanisme pour les dérivés halogénés en précisant l'aspect stéréochimique. ➤ Retrouver la structure du produit formé suite à l'addition d'un organomagnésien sur l'un des électrophiles étudiés. De même, prévoir la structure de l'organomagnésien ainsi que celle du dérivé carbonyle à partir de l'alcool obtenu.
Chapitre 6 : Les alcools (2 H Cours + 1 H30 min T.D.) 1- Réactivité due au caractère acide : action des amidures, des organomagnésiens et du sodium 2- Réactivité due au caractère basique : -Déshydratation intramoléculaire - Substitution du groupe hydroxyle par un halogène : SOCl₂, PX₃ et PX₅ (X = Cl ou Br) 3- Réactions d'oxydation Alcool primaire (K₂Cr₂O₇/H₂SO₄ ou pyridinium chlorochromate : PCC), alcool secondaire	➤ Caractère basique et nucléophile de l'alcoolate obtenu. Synthèse de Williamson. ❖ Détailler le mécanisme de la déshydratation ❖ La substitution du groupe hydroxyle est donnée sans mécanisme. ➤ Justifier le choix de l'oxydant dans le cas d'un alcool primaire selon qu'on veut s'arrêter au stade de l'aldéhyde ou

	<i>poursuivre l'oxydation vers l'acide carboxylique correspondant.</i>
Chapitre 7 : Les dérivés carbonylés : cétones et aldéhydes (2 H30 min Cours + 2 H T.D.) 1- Réactions d'additions nucléophiles : Ion cyanure, eau, alcools et éthylène glycol 2- Réactions de réduction : - Réduction par LiAlH_4 ou NaBH_4. 3- Réaction de Wittig 4- Réactivité de l'hydrogène en α du groupe carbonyle CO : aldolisation/ cétoalisation et crotonisation 5- Tests caractéristiques des cétones et des aldéhydes	❖ Prendre comme exemple, l'hémiacétalisation du glucose (intramoléculaire) : représentation de Haworth ➤ Comment une catalyse acide augmente la réactivité du groupe carbonyle ➤ Justifier la nécessité d'utiliser l'éthylène glycol pour protéger un carbonyle dans une synthèse. ❖ Pour la réaction de réduction, on donne un mécanisme simplifié. ❖ Mécanisme détaillé à partir de la triphénylphosphine ❖ Pour les condensations mixtes, on se limite aux cas de condensations intermoléculaires entre un aldéhyde et une cétone. ➤ Retrouver les deux dérivés carbonylés à partir du produit de condensation ❖ DNPH, Tollens, Liqueur de Fehling et Test haloforme
Chapitre 8 : Les acides carboxyliques et leurs dérivés (1 H30 min Cours + 1 H30 min T.D.) 1- Réactivité des acides carboxyliques : - Réaction de substitution du groupe OH par un chlore : avec SOCl_2, PCl_3 et PCl_5 - Réactivité avec les alcools (réaction	➤ Intérêt synthétique de la fonction acide.

d'estérification) - Réaction de réduction par LiAlH_4 2- Réactivité des dérivés d'acides : - Réaction de saponification des esters - Réduction des esters et des amides par LiAlH_4 - Action d'amines et d'alcools sur les chlorures d'acide : préparation d'amides et d'esters	❖ Les réactions citées sont données sans mécanismes. ➤ <i>Reconnaitre la liaison peptidique</i>
---	--

Programme de Biologie Animale du Cycle Préparatoire Biologie-Géologie (BG)

Biologie Animale 1

Biologie de la Reproduction et du Développement Animal

30 heures de cours et 15 h de travaux pratiques (première année ; premier semestre)
un devoir et un examen écrits ; des comptes rendus et un examen TP

Les objectifs de cet enseignement

Ce programme comprend deux fonctions vitales des animaux. Il mérite une introduction intégrative qui permet de situer ces deux fonctions dans le contexte général de la biologie du vivant. Ainsi, la notion de **L'organisme animal : un système en interaction avec son environnement** est importante car son enseignement permet de relier ces deux fonctions aux autres parties du programme et d'éviter une vision « isolée » de l'organisme.

On l'aborde sous la forme d'un cycle global :

- D'abord, avec les deux phases : reproduction, développement (ontogenèse) ;
- Puis, avec les deux modalités de la reproduction (sexuée-asexuée) et les deux modalités du développement (direct-indirect),

Ce qui permet de viser des objectifs sociétaux (agronomie et technologie) et d'autres scientifiques (diversité des cycles et richesse en adaptation interactive avec l'environnement).

Cette introduction générale, non seulement, nous renseigne sur la diversité du vivant et de ses interactions avec son milieu, mais aussi, s'ouvre sur l'étude de cette diversité qui prépare le cours de zoologie en préparant aux aspects phylogénétiques du règne animal.

INTRODUCTION : (1h)

L'organisme animal en interaction avec son environnement

les cycles vitaux des animaux :

1. Alternance de la reproduction/développement.
2. Définition des deux fonctions : la reproduction et du développement
3. Les grandes modalités de la reproduction : sexuée, asexuée, et leurs importances respectives pour l'organisme et pour l'environnement naturel et socio-économique
4. Les grandes modalités du développement : direct et indirect, et leurs relations avec l'écologie.

- La reproduction est un processus à la fois conservateur et diversificateur de l'espèce. Le premier stabilise l'espèce tout en gardant un polymorphisme représentant un avantage sélectif, le second ouvre à la sélection et permet la spéciation.

La relation entre la reproduction asexuée et la présence de cellules indifférenciées.

- Le développement est un processus plastique également. Il est contrôlé génétiquement et épigénétiquement. Les deux contrôles sont en interaction dynamique très complexe qui permet la diversification et l'adaptation.

Chapitre 1

LA REPRODUCTION SEXUEE (14h)

1- Les phases de la reproduction sexuée : gamétogenèse, fécondation (6h)

Introduction : les problèmes posés à la reproduction sexuée :

1. L'origine des cellules reproductrices et leur ségrégation
2. La différenciation des cellules reproductrices à la suite de leur ségrégation
3. Les mécanismes de la fécondation et ses fonctions
4. Les cas particuliers de la reproduction sexuée et leurs causalités
5. Le déterminisme du sexe et la sexualisation dans le gonochorisme

1.1. La gamétogenèse : (3h)

- | | |
|--|--|
| 1.1.1. Définition du germen et de ses caractéristiques | - totipotence, haploïdie, sexualité et anisogamie, capacité de fusionner |
| 1.1.2. Origine et différenciation du germen par rapport au soma, précoce ou tardive et sa relation avec le cycle vital | - Tardive dans le cas de l'alternance du cycle sexué et asexué (spongiaires, cnidaires, plathelminthes)
- Précoce dans le cas de la perte de la reproduction asexuée (cas de deux invertébrés : Ascaris et Miastor ; cas de deux vertébrés : Amphibien et Homme)
Lien : Zoologie des Invertébrés |
| 1.1.3. Rôle de la gamétogenèse | - réduction chromatique, préparation à la fécondation/développement |
| 1.1.4. La différenciation ou sexualisation du germen : Etude comparée entre spermatogenèse et ovogenèse | - insister sur les différences et leur importance dans la biologie de l'organisme en interaction avec son milieu (tableau comparatif). |
| 1.1.5. Biologie des spermatozoïdes : | - structure type, fécondance, mobilité fléchante, capacitation |
| 1.1.6. Biologie de l'ovocyte | - synthèses pré-morphogénétiques préparant le développement, membranes protectrices : prévitellogenèse et vitellogenèse.
Lien : différents types d'œufs (chapitre embryologie) |
| 1.1.7. Les anomalies de la gamétogenèse | - l'aneuploïdie, la polyploïdie. |

1.2. La fécondation : (2h) 1.2.1. Définition et types de fécondation 1.2.2. Rôle de la fécondation 1.2.3. Etapes de la fécondation 1.2.4. Le déterminisme de la fécondation : (expérience de Bataillon de la parthénogenèse expérimentale) 1.2.5. Les anomalies de la fécondation	- interne, externe. l'oviparité, la viviparité - rétablissement de la diploïdie de l'espèce, différentes modalités (externe, interne) en relation avec la diversité des milieux. - Rapprochement des gamètes, capacitation, - Plasmogamie et activation de l'ovocyte : réaction corticale, remaniements subis dans l'œuf (nucléaires, cytoplasmiques et métaboliques) et préparation au développement. (2 exemples différents : l'oursin et l'homme) -Amphimixie et rétablissement de la diploïdie (exemple de l'oursin) - rôle du spermatozoïde : régulation astérienne, régulation chromosomique, - rôle de l'ovocyte (préparation au développement). - polyspermie, digynie, parthénogenèse
2- Les différentes modalités de la reproduction sexuée : l'hermaphrodisme, la parthénogenèse, le gonochorisme (8h)	
2.1. L'hermaphrodisme (2h) 2.1.1. Définition et différents types 2.1.2. L'hermaphrodisme fonctionnel Définition, nécessité de la protandrie ou protogynie, place dans le règne animal : déterminisme écologique (sédentarité, vie terrestre, parasitisme, vie fixée) • Différentes modalités de l'hermaphrodisme fonctionnel : simultané, successif équilibré • Cas intermédiaires : hermaphrodisme successif non équilibré (Patella), et hermaphrodisme alternatif (Ostrea et autres bivalves) • Différentes modalités de l'hermaphrodisme non fonctionnel chez les organismes gonochoriques : rudimentaire, juvénile, intersexualité	- fonctionnel, non fonctionnel naturel, intersexualité - donnez des exemples de chaque cas écologique - Exemples d'hermaphrodisme simultané : appareil génital d'animal terrestre évolué (l'escargot qui montre une fécondation croisée), appareil génital d'un animal parasite (le ténia qui montre la possibilité d'autofécondation) - Exemples d'hermaphrodisme successif : cas d'un invertébré (<i>Crepidula</i> avec passage d'un appareil mâle à un appareil femelle), cas d'un vertébré (Poisson Sparidae avec suprématie d'un territoire sur l'autre dans une même gonade) - Exemple d'hermaphrodisme rudimentaire (l'organe de Bidder du crapaud mâle), conséquence de cet hermaphrodisme : le gonochorisme labile et l'inversion sexuelle potentielle). Autre exemple inverse au

2.1.3. Signification biologique de l'hermaphrodisme	précédent (l'arrhénoïdie accidentelle chez les Oiseaux femelles ; la poule) *Exemple d'hermaphrodisme juvénile : cas des Poissons (<i>Dentex</i>) *Exemple d'intersexualité (free Martin), - la bipotentialité sexuelle embryonnaire, la fragilité du déterminisme du sexe, l'installation adaptative de l'hermaphrodisme.
2.2. La parthénogenèse et d'autres cas particuliers (2h) • Les cas particuliers : gynogenèse, androgenèse. • La parthénogenèse : 2.2.1. Définition et problèmes de la régulation de la diploïdie 2.2.2. Différents types : rudimentaire, juvénile, accidentel, obligatoire et les mécanismes compensateurs de la diploïdie 2.2.3. Signification biologique et écologique de la parthénogenèse 2.3. Conclusion générale sur les cas particuliers de la reproduction sexuée et leur chevauchement avec le gonochorisme	Lien : parthénogenèse traumatique de Bataillon -naturelle, expérimentale, thélytoque, arrhénotoque, deutérotoque - Exemple de parthénogenèse rudimentaire : la femme et le kyste ovarien - Exemple de parthénogenèse juvénile : la pédogenèse chez les Insectes (<i>Miastor</i>) - Exemple de parthénogenèse accidentelle ou occasionnelle : le bombyx du murier - Exemples de parthénogenèse obligatoire régulière ou normale : *Parthénogenèse facultative : exemple l'abeille *Parthénogenèse cyclique (saisonnière ou géographique) : exemple du puceron de la vigne *Parthénogenèse obligatoire stricte (constante) : daphnie, vertébrés (Reptiles ; lézards) - possibilité de changement chromosomique brutal et donc de spéciation, adaptation aux conditions extrêmes -déterminisme de la parthénogenèse : facteurs externes et ou internes Lien : les anomalies de la gamétogenèse, fécondation ; relation de ces cas avec les conditions épigénétiques.
2.4. Le gonochorisme (4h) 2.4.1. Définition : Les caractères sexuels et leur hiérarchisation : primordiaux, primaires, secondaires 2.4.2. La plasticité du déterminisme du sexe entre génétique et épigénétique	-insister sur la bivalence sexuelle embryonnaire - Cas d'un déterminisme épigénétique strict : les Reptiles (crocodiles) - Cas d'un déterminisme génétique labile : l'organe de Bidder

2.4.2.1. Les chromosomes sexuels et leurs rôles dans le déterminisme du sexe 2.4.2.2. Les anomalies du déterminisme génétique : la non ségrégation des chromosomes homologues ou de la division méiotique ou mitotique : 2.4.3. Conclusion : 2.4.3.1. Le cas de cette aneuploïdie dans la parthénogenèse. 2.4.3.2. Le cas de l'hermaphrodisme 2.4.3.3. Rôle des hormones sexuelles dans la différenciation du sexe 2.4.4.4. L'ambivalence du sexe gamétique dans tous les cas de reproduction sexuée Conclusion générale :	- Cas d'un déterminisme génétique strict : Mammifère, Insecte - Différents caryotypes : hétérogamétiques mâles (XY ou XO), hétérogamétiques femelles (ZW ou ZO) *Exemple de déterminisme chromosomique chez la drosophile : le rapport X/A *Exemple de déterminisme chromosomique chez les mammifères : le rôle du SRY (SRY) et de DAX1 - à la gamétogenèse : exemple de l'intersexualité de l'homme due à l'aneuploïdie : les différents syndromes. - à la fécondation : le gynandromorphisme dû à la formation de chimères par dispermie au niveau d'ovocyte n'ayant pas libéré son deuxième globule polaire (Bombyx) - à la segmentation : le gynandromorphisme dû à des anomalies de ségrégation lors de la 1^{ère} division de segmentation - Lien avec la non ségrégation des chromosomes homologues dans la parthénogenèse et ses conséquences. - Lien avec l'hermaphrodisme par l'explication de l'instabilité de la séparation des sexes et du maintien de l'ambivalence sexuelle plus ou moins réversible et fonctionnelle. - résumé du cas des Mammifères : exemple de la castration du lapin. le déterminisme du sexe est génétique, la différenciation est épigénétique
--	--

Chapitre 2

LE DEVELOPPEMENT ANIMAL (16h)

Les deux grandes étapes du développement : embryonnaire, post-embryonnaire et leurs caractéristiques (développement embryonnaire dépendant d'une source de nourriture, développement post-embryonnaire libre : direct ou indirect (les causes de ces deux modalités : épuisement des réserves)

1- Les phases du développement embryonnaire (2h)

1.1. L'œuf :	- rappel de ses caractéristiques, ses différents types
1.2. La segmentation et son rôle	- compartimentation de l'œuf en territoires présumptifs, rôle du blastocoele dans la
• Les types de segmentation :	

radiaire/spirale ; totale/partielle 1.3. La gastrulation et son rôle • Les principaux types des mouvements : embolie, épibolie, immigration, délamination. 1.4. L'organogenèse et son rôle	gastrulation. - formation des feuillets embryonnaires et notion de champs morphogénétiques. Rôle des molécules d'adhérence cellulaire dans ces mouvements. - différenciation des feuillets en tissus et organes fonctionnels donnant une homéostasie structurale et fonctionnelle.
2- Les différents types de développement embryonnaire et leur relation avec les réserves nutritives de l'embryon (8h)	
2.1. Relation entre la richesse de l'œuf en vitellus et son mode de segmentation et de gastrulation 2.1.1. Exemple1 : œuf oligolécithe de l'oursin, œuf hétérolécithe des Amphibiens : (2h) - Etude comparée entre les deux types œufs - Etude comparée entre Leur modalités de segmentation respective : - Etude comparée entre leurs modalités de gastrulation : -Formation du seul orifice embryonnaire le blastopore à rôle anal. - Formation des trois feuillets embryonnaires : caractéristiques de tous les triploblastiques - Devenir des feuillets embryonnaires chez tous les triploblastiques. 2.1.2. Exemple 2 : œufs alécithe de Mammifère, télolécithe d'Oiseau : (3h) - Comparaison entre les deux types d'œufs : - Comparaison entre les deux types de segmentation : - Importance des annexes embryonnaires chez ces deux groupes : - Comparaison de la gastrulation :	-Isolécithe, mésolécithe -totale, radiaire, subégale/inégale donnant deux types de coeloblastulas régulière/irrégulière. -immigration, embolie (involution comme cas particulier de l'embolie), épibolie. -insister sur le rôle des membranes coquillières chez les Oiseaux, et le développement direct chez les deux animaux. -respectivement totale subégale, partielle ; mais leur aboutissement au même type de blastula primaire : respectivement blastocyste et blastoderme avec blastocoele virtuel. - précocité de l'annexe nutritive : vésicule vitelline (l'hypoblaste ou endoblaste extraembryonnaire de la blastula secondaire) -commune aux deux groupes car elle

	intéresse seulement une partie de l'embryon semblable entre les deux : bouton embryonnaire ou disque germinatif. Immigration, involution, soulèvement antéropostérieur et repliement ventral des trois feuillets.
2.2. Etude comparée de leur organogenèse et sa relation avec la richesse en vitellus : (2h) 2.2.1. Explication du développement indirect dans les œufs ologolécithe et hétérolécithe donnant des larves : Pluteus, Têtard (bourgeon caudal) et direct chez les Amniotes. 2.2.2. Explication du devenir du blastopore chez tous les cas : 2.2.3. Explication de la neurulation différente entre l'oursin et les vertébrés : épithélioneuriens, épineuriens. 2.2.4. Comparaison du début de l'organogenèse (neurulation, mésodermisation) 2.2.5. Conclusion : présence des annexes embryonnaires chez les Amniotes	l'anūs (bien démontré par l'organogenèse de l'oursin). Conclusion par l'explication de la relation entre les deutérostomiens. commune chez les trois vertébrés (Amphibiens, Oiseaux, et Mammifères).
2.3. Les annexes embryonnaires des Amniotes : (1h) 2.3.1. L'annexe de la vésicule vitelline : 2.3.2. L'annexe de l'amnios : 2.3.3. L'annexe de l'allantoïde : 2.3.4. L'annexe du placenta spécifique aux Mammifères Placentaires, les seuls vrais vivipares, les autres étant ovipares :	-son origine, sa formation et son rôle chez les trois classes - son origine, sa formation, son rôle et sa précocité chez les Mammifères -son origine, sa formation, son rôle chez les Oiseaux/reptiles et chez le Mammifères - son origine, sa formation précoce et son rôle. Les différents types.
3- Les mécanismes du développement embryonnaire : quelques notions d'embryologie causale anatomique et moléculaire (6h)	
3.1. Rappel de l'anisotropie de l'œuf 3.2. La relation entre régulation et détermination 3.2.1. La régulation des territoires présomptifs 3.2.2. La détermination des champs	- due aux synthèses morphogénétiques primordiales au cours de l'ovogenèse : les plasmes organisateurs (organogères maternels). - expériences d'ablation ou de greffe : Prendre des exemples variés (amphibiens, oursin) - les mêmes expériences

morphogénétiques 3.2.3. Conclusion : deux états provisoires au début du développement embryonnaire. La présence de potentialités de division et de différenciations et leur perte progressive vers une détermination 3.2.4. Notion de cellules souches totipotentes, pluripotentes, multipotentes, différenciées ; et le passage progressif des unes vers les autres 3.3. Limite spatio-temporelle de la régulation et de la détermination, les inducteurs primaires 3.3.1. Les étapes de la détermination • <i>Les premières déterminations maternelles</i> : les polarités de l'embryon • <i>Les déterminations successives</i> : endodermique, mésodermique, ectodermique : 3.3.2. Le déterminisme de la détermination : les inducteurs embryonnaires • <i>Définition des inducteurs embryonnaires</i> • <i>Mise en évidence par des expériences de greffe ectopique</i> 3.4. La différenciation cellulaire au cours de l'organogenèse, les inducteurs secondaires 3.4.1. Définition de la différenciation : passage de l'état déterminé à l'état différencié avec la perte totale des potentialités de division et de différenciation. 3.4.2. Le déterminisme de la différenciation : des inducteurs secondaires (définition) 3.5. Les caractéristiques des inducteurs primaires et secondaires 3.6. Les mécanismes moléculaires des inducteurs 3.7. Les gènes du développement : gènes	- Exemple du cas de l'oursin : expériences d'Horstadius expliquant les gradients de polarité. - expériences de culture de territoires isolés et à des âges différents (cas des Amphibiens) - cas de l'expérience de Spemann. - La seule destinée est le fonctionnement, le vieillissement et la mort. - exemple de la différenciation de l'œil - action par contact, limitée dans l'espace et dans le temps, action de tissus déterminés sur des tissus compétents, action spécifique, transmissible, générale. - substances paracrines ou juxtacrines qui agissent par contact activant ou inhibant des voies de signalisation internes en relation avec des facteurs de transcription (protéines impliquées dans l'activation ou l'inhibition des gènes du développement).
--	--

régulateurs de deux types 3.7.1. Gènes régulateurs d'autres gènes régulateurs interviennent lors des déterminations embryonnaires 3.7.2. Gènes régulateurs des gènes de structure interviennent lors de la différenciation définitive : nommés gène homéotiques ou gènes différenciateurs. 3.7.3. L'expression différentielle des gènes contrôlée par des inducteurs à action multiple et en cascade. Abolition du dogme de Crick (à tout gène une protéine) vers la plasticité génétique. 3.8. Conclusion 3.8.1. La plasticité régulatrice du développement et les mécanismes de réparation des anomalies et des dommages. 3.8.2. L'application de cette plasticité dans la santé et l'environnement.	- Le cas extrême des cancers. - Dans l'environnement : clonage et transgénèse - Dans la santé : la médecine régénérative
TRAVAUX PRATIQUES (15h)	
CHAPITRE 1 : LA REPRODUCTION SEXUEE (9H) - 1^{ère} séance sur la méiose et la gamétogenèse - 2^{ème} séance : Etude de coupe de testicule et d'ovaire - 3^{ème} séance : dissection d'un animal hermaphrodite (escargot)	- rappel de connaissances du secondaire particulièrement la classe terminale - insister sur la méiose - insister sur la différence entre le soma gonadique et le germen. Donner des exemples de différenciation tardive du germen - observation d'ovotestis de poisson et d'escargot.
CHAPITRE 2 : LE DEVELOPPEMENT ANIMAL (6H) - 4^{ème} séance : étude des principaux stades embryonnaires d'un oursin - 5^{ème} séance : étude des principaux stades de développement d'un amphibien, comparaison avec les Oiseaux	

Programme de Biologie Animale du Cycle Préparatoire Biologie-Géologie (BG)

Biologie Animale 2

DIVERSITE DES PROTISTES ET DES PARAZOAIRES AUX PROTOSTOMIENS (BG1)

30 heures de cours et 15 h de travaux pratiques (première année ; second semestre)
un devoir et un examen écrits ; des comptes rendus et un examen TP

Les objectifs de l'enseignement

Ce programme représentera la diversité du règne des Protistes et du règne animal et leurs relations de parentés phylogénétiques actuelles. Étudiées non seulement par l'analyse des ressemblances et des différences, mais, aussi par la recherche de la parenté proche grâce à l'analyse des deux états de chaque caractère : ancestral ou plésiomorphe et dérivé ou apomorphe ce qui permet de distinguer les vraies similitudes (homologies) des fausses (homoplasies), de réviser les classifications et d'expliquer les liens de parenté (mono-, para- ou polyphylie). En même temps, cette approche permettra de réviser la relativité des ressemblances phénétiques qui peuvent être dues à des phénomènes de convergence adaptative due à un même milieu de vie. Donc, une introduction des nouvelles méthodes classificatoires et leurs principes de base est nécessaire.

INTRODUCTION GÉNÉRALE (1h30)

1. Les méthodes de classification des êtres vivants : entre phénétique et cladistique

1.1. La phénétique

1.2. La cladistique

1.3. L'éclectique

2. Les principes de base de la classification

2.1. Le principe de la connexion des caractères

2.2. Le principe de la recapitulation

2.3. La nécessité de la monophylie pour regrouper des taxons

2.4. Le concept espèce

- ses principes, ses avantages et ses faiblesses

- ses principes, ses avantages et ses faiblesses

- synthèse des deux avec l'étude écologique

- renseigne sur l'unité des plans d'organisation

- renseigne sur l'unité du développement et le sens de l'évolution.

- Ce qui explique l'éclatement d'anciens taxons et l'artificialité des catégories attribuées aux différents taxons (de l'embranchement à la famille). Seule la nomenclature binomiale des espèces est correcte. Elle correspond à l'unité de base de la classification. Toutefois, l'espèce n'est pas immuable puisqu'elle se définit par son isolement reproductif qui n'est pas strict et qui met en jeu une compétition pour la reproduction.

- ses controverses

Chapitre I LES PROTISTES A AFFINITES ANIMALES (10H)	
1. Introduction: les trois domaines du vivant: Archées, Eubactéries, Eucaryotes (30mn) 2. Caractéristiques des Protistes ou Eucaryotes unicellulaires 3. La reproduction chez les Protistes à affinité animale (1h 30) 3.1. La multiplication asexuée ou agamogonie 3.2. La reproduction sexuée ou gamogonie 4. Phylogénie et quelques cycles reproducteurs des Protistes (8h) - Arbre phylogénétique montrant la polyphylie des Protistes - Les cycles choisis sont différents les uns des autres et en relation avec certaines maladies 4.1. Arbre des Bicontes 4.1.1 La lignée verte 4.1.2. Les Chromoalvéolés à 4 branches a- Les Alvéolobiontes • Ciliés Cycle diplobiontique avec sexualité non liée à la reproduction • Apicomplexés -Cycle haplobiontique avec alternance de phases sexuée/asexuée. La sexualité est liée à une différenciation gamétique -Cycle exclusivement sexué • Dinophytes b- Les Straménopiles c- Les Cryptophytes d- Les Haplophytes	- Citez rapidement les différences principales - Définir les protistes ou eucaryotes unicellulaires - organisation et fonctions vitales des protistes à affinités animales. (L'organisation des protistes à affinités végétales sera traitée en Botanique (BG2)). - La division binaire - La division multiple ou schizogonie - Le bourgeonnement ou gemmiparité - L'enkystement - Cycle haplobiontique(haplophasique) - Cycle diplobiontique - Cycle haplodiplobiontique - Deux groupes frères: • Les Bicontes: caractères dérivés • Les Unicotes: caractères dérivés - 4 groupes frères (voir en Botanique) - Caractères dérivés - Caractères dérivés - Caractères dérivés et cycle de reproduction - La conjugaison des Ciliés, type <i>P. caudatum</i> - Caractères dérivés et cycle de reproduction - Type1: <i>Eimeria perforans</i> (Coccidiose du lapin) - Type 2: <i>Plasmodium falciparum</i> (Paludisme) - Type <i>Stylocephalus longicollis</i> (la grégarine) - (voir en Botanique) - (Lignée brune à voir en Botanique)

4.1.3. Les Rhizariens a- Les Actinopodes b- Les Foraminifères: Granuloréticulés Cycle haplodiplobiontique c- Les Chlorarachniophytes 4.1.4. Les Excavobiontes: 4 branches a- Les Euglénobiontes: regroupent les Euglénophytes, les Kinétoblastides (trypanosome) et les pseudociliés • Cycle complexe sans sexualité b- Les Parabasiliens c- Les Métamonadines d- Les Percolozoaires 4.2. Les Unicontes: deux groupes frères 4.2.1. Les Amoebozoaires: deux frères a- Les Rhizopodes b- Les Mycétozoaires • Cycle simple sans sexualité 4.2.2. Les Opisthocontes: deux frères a- Les Champignons (Eumycètes et Microsporidies) b- Les Choanoorganismes: deux frères • Les Choanoflagellés • Les Métazoaires	- phylogénie incertaine - Caractères dérivés - Rassemblent Radiolaires, Héliozoaires et Acanthaires - Caractères dérivés - <i>Globigerina</i>, <i>Gromia</i> (voir en Botanique) - Caractères dérivés - Caractères dérivés, exemple <i>Euglena</i>, <i>Trypanosoma</i> - Exemple du Trypanosome : <i>Trypanosoma gambiense</i> - Caractères dérivés. Exemple <i>Trichomonas</i>, <i>Trichonympha</i> - Caractères dérivés. Exemple <i>Giardia vaginalis</i> - Caractères dérivés. Exemple <i>Teramitus</i>, <i>Naegleria</i> - Caractères dérivés - Caractères dérivés - Caractères dérivés. Exemple <i>Amoeba</i>, <i>Diffugia</i> - Caractères dérivés. - Exemple de l'amibe dysentérique : <i>Entamoeba histolytica</i> - Caractères dérivés (voir en Botanique) - Caractères dérivés - Caractères dérivés (voir au chapitre 2, et BA3)
Chapitre II DIVERSITE DES PARAZOAIRES AUX PROTOSTOMIENS (18h30)	
Etude phylogénétique, organisationnelle et écologique 1. Place phylogénétique et critères de base de leur phylogénie(1h) 1.1. Définition et place phylogénétique des Métazoaires dans le monde vivant	- Eucaryotes, Unicontes, Opisthocontes, Choano-organismes, Métazoaires, Hétérotrophes, mobiles

1.2. Ancêtres probables des Métazoaires : Les Choanoflagellés	-Les Protistes à affinité animale seraient les ancêtres des Métazoaires. Exemple : Organisation générale et fonctions vitales d'un Choanoflagellé : Exemple : <i>Codonosiga</i>
1.3. Phylogénie des Métazoaires	-Présentation générale de l'arbre phylogénétique des Métazoaires. - Divisés phylogénétiquement en Parazoaires et Eumétazoaires.
2. Les Parazoaires et leurs relations phylogénétiques (1h)	
2.1. Caractéristiques des Parazoaires	- absence de tissus, ni de relation, ni de gastrulation. Fonctions de digestion et de reproduction primitives. Vie fixée.
2.2. Les représentants des Parazoaires	- éclatement de l'ancien embranchement des Spongiaires en groupes séparés en:Démospouges, Hexactinellides et Calcisponges.
2.2.1. Les Desmosponges et leurs caractères principaux	Exemple : Eponges d'eau douce, Eponges de cuisine et Eponges de toilette.
2.2.2. Les Hexactinellides et leurs caractères principaux	Exemple : Euplectelle
2.2.3. Les Calcisponges et les caractères qui les rapprochent des Eumétazoaires	Exemples : <i>Leucosolenia</i> et <i>Sycon raphanus</i> .
2.3. Importance écologique et socioéconomique	
3. Les Eumétazoaires (3h)	
3.1. Caractéristiques du groupe	- gastrulation, tissus avec soutien, communication et relation, symétrie
3.2. Phylogénie des Eumétazoaires	
3.2.1. Les Diploblastiques : exemple des Cnidaire :	
3.2.1.1. Caractères généraux des Cnidaire	acquisition d'une différenciation cellulaire et d'un système de régulation neuroendocrine. Amélioration de la défense et de la digestion
3.2.1.2. Etude succincte de leur classification (tableau comparatif)	
3.2.1.3. Etude de l'organisation de l'hydre verte (<i>Chlorohydra viridissima</i>)	Morphologie externe, coupes histologiques, reproduction
3.2.1.4. Etude du cycle complet avec l'alternance des deux phases fixée et libre : Cycle d' <i>Obelia geniculata</i> .	
3.2.1.5. Importance écologique	Exemples : Méduses et coraux

3.2.2. Les Triploblastique, Bilatériens, Coelomates : 3.2.2.1. Caractéristiques du groupe : 3.2.2.1. Subdivisions du groupe *Protostomiens *Les Deutérostomiens	trois feuillets, symétrie bilatérale, cœlome qui peut dégénérer secondairement, céphalisation. Complexification des appareils explication des caractères principaux Le devenir du blastopore, le type de formation du cœlome (schizocoelique). explication rapide du devenir du blastopore et du mode de formation du cœlome. Ce groupe fera partie du programme de BG2.
4. Phylogénie des Protostomiens(13h30) 4.1. Les Spiralia (0h30) 4.1.1. Caractéristiques principales	- Ne seront mentionnés que les grands groupes actuels qui appartiennent à deux lignées : les spiralia et les ecdysozoaires - Caractéristiques de la segmentation spirale qui leur a donné le nom - Subdivisons : les Platyzoairesparenchymiens, et les Lophotrochozoaires (vrai cœlome)
4.1.2. Les Platyzoaires(2h30) 4.1.2.1. Caractères généraux 4.1.2.2. Classification A. Les Plathelminthes libres (anciens Turbellariés) A.1. Caractéristiques générales A.2. Organisation générale d'une planaire B. Les Trématodes B.1. Caractéristiques générales B.2. Organisation générale de la grande douve <i>Fasciola hepatica</i> B.3. Cycle vital de <i>Fasciola hepatica</i> C. Les Cestodes C.1. Caractéristiques générales C.2. Organisation générale du ténia inerme <i>Taeniasaginata</i> C.3. Cycle vital de <i>Taeniasaginata</i> D. Importances écologiques et sociales 4.1.3. Les Lophotrochozoaires	- Ils sont représentés essentiellement par l'embranchement des Plathelminthes. - Insister sur les nouvelles acquisitions : musculature, appareil excréteur protonéphridien, appareil reproducteur très différencié Il s'agit de mettre en évidence l'importance de la reproduction asexuée et de l'organisation en relation avec le parasitisme. Il s'agit de mettre en évidence l'importance de la reproduction sexuée et de l'organisation en relation avec le parasitisme. - représentés par deux embranchements : les Annélides et les Mollusques (on peut citer les Phoronidiens, les Bryozoaires et les Brachiopodes)

4.1.3.1. Caractéristiques principales 4.1.3.2. Mode de développement qui a donné d'un côté les Annélides et de l'autre les Mollusques. 4.1.3.3. Les Annélides (1h30) 4.1.3.3.1. Caractères généraux et acquisitions nouvelles 4.1.3.3.2. Classification 4.1.3.3.3. Importances écologiques	larve trochophore et/ou dérivée (véligère), lophophore - développement par schizométamérie chez les Annélides et développement dorso-ventral chez les Mollusques. - Insister sur les acquisitions nouvelles : locomotion assez performante, nutrition-digestion, appareil circulatoire clos et parfois appareil respiratoire, appareil excréteur métanéphridien, système nerveux ganglioneure, appareil reproducteur adapté au mode de vie, conquête du milieu terrestre chez deux grandes subdivisions Exemple : Organisation générale de <i>Nereis sp.</i> La présenter sous forme d'un tableau : Polychètes marines, Oligochètes et Achètes terrestres et paludicoles. Exemple : Sangsue et Ver de terre
4.1.3.4. Les Mollusques (2h30) 4.1.3.4.1. Caractères généraux 4.1.3.4.2. Diversité des Mollusques A. Les Protomollusques A.1. Les caudofovéates et les solénogastres (appelés anciennement aplacophores) A.2. Les Polyplacophores et les Monoplacophores B. Les Eumollusques B.1. Les Viscéroconques B.2. Les Loboconques 4.1.3.4.3. Importances écologiques et socioéconomiques	Malgré leur grande diversité un même plan d'organisation : tête et bulbe buccal, pied, manteau et cavité palléale, coquille, masse viscérale, Les grandes subdivisions phylogénétiques selon leur type de système nerveux et leur coquille Coquille plus ou moins développée et recouvrant tout l'animal, un système nerveux cordoneure : 4 groupes Coquille ne couvrant souvent pas la tête ou régressée secondairement, un système nerveux ganglioneure formant une paire de triangle latéral autour de l'œsophage : 4 groupes -à masse viscérale sous la coquille et tête bien développée : groupant les Gastéropodes (escargot) et les Céphalopodes (seiche) -à masse viscérale enveloppée par un manteau lobé, réduction de la tête et du bulbe buccal, groupant les Bivalves (moule) et les Scaphopodes (<i>Dentalium</i>). Exemples : Huître perlière, conchyliculture, médecine,...)

4.2. Les Ecdysozoaires 4.2.1. Subdivisions principales 4.2.1.1. Les Némathelminthes (1h30) 4.2.1.1.1. Caractéristiques générales 4.2.1.1.2. Etude du plan d'organisation d'<i>Ascaris lumbricoides</i> 4.2.1.1.3. Cycle vital d'<i>Ascaris lumbricoides</i> 4.2.1.1.4. Importance écologique.	- Caractérisés par l'ecdysone ou hormone de mue qui contrôle le phénomène de la mue typique des organismes invertébrés à tégument externe inextensible formé par une cuticule rigide. - Caractéristiques principales du groupe et leur diversité considérable due à la cuticule. - Parasitisme (Nématodes de la pomme de terre, Nématode de la betterave, ...). - Importances écologiques des Nématodes dans l'aération des sédiments aquatiques.
4.2.1.2. Les Arthropodes (6h30) 4.2.1.2.1. Caractères généraux 4.2.1.2.2. Appendice arthropodien 4.2.1.2.3. Structure de la cuticule et la mue 4.2.1.2.4. Développement post-embryonnaire des Hexapodes. 4.2.1.2.5. Diversité des Arthropodes et importance socioéconomique A. Les Chélicératomorphes B. Les Antennates-Mandibulates	(céphalisation et encéphalisation, appareils circulatoire, respiratoire, digestif, excréteur, reproducteur) Archétype et adaptations (crevette) Mue de croissance et mue de métamorphose Allométrie, isométrie Relation entre métamorphoses et diversité - Le développement Hétérométabole : • Paurométaboles (Criquet) • Hémimétabole (Cigale) - Le développement Holométabole (larves et nymphes): • Types de larves : Compodéiforme (Fourmilion), Mélolonthiforme (Hanneton), Eruciforme (Papillon), Vermiforme (asticot de Mouche) • Types de nymphes : Libre (fourmilion), Chrysalide (papillon), pupe (mouche) Présenter les principales subdivisions avec quelques caractères distinctifs (tableau comparatif) Mérostomes et Arachnides (exemples : scorpion, araignée et Acariens) les Myriapodes (mille-pattes), les Crustacés (crevette), les Hexapodes

TRAVAUX PRATIQUES (15h)

TP n°1 : Les Eucaryotes unicellulaires à affinité animale	-Rappel de la classification phylogénétique et de la nomenclature binomiale -Observation microscopique d'<i>Amoeba proteus</i>, <i>Paramecium caudatum</i>, <i>Trypanosoma gambiense</i>, <i>Stylocephalus longicollis</i>, Foraminifères, Radiolaires, <i>Trichomonas</i>, <i>Giardia vaginalis</i>, <i>Naegleria</i>; <i>Entamoeba histolytica</i>
TP n°2: Les Eponges et les Cnidares (organisation et classification)	- Exemple d'éponges calcaires (<i>Sycon</i>) et de Desmosponges (éponges de toilette) - Observation microscopique de l'hydre verte <i>Chlorohydra viridissima</i> et d'<i>Obelia geniculata</i>. - Classification des Cnidares: Hydrozoaires (<i>Hydra</i>, <i>Obelia</i>), Scyphozoaires (<i>Aurelia</i>), Anthozoaires (<i>Anemonia</i>, <i>Coralium</i>, <i>Gorgonia</i>)
TP n°3 : Les Plathelminthes et les Nématelminthes	Exemples : Trématodes (petite douve) et Cestodes (<i>Taenia saginata</i> et <i>Echinococcus</i> (bourgeonnement interne)) -Observation microscopique de la petite douve <i>in toto</i> et les stades larvaires. - Observation microscopique du scolex et proglottis immature, mature et cucurbitain de <i>Taenia saginata</i> et <i>T. solium</i>) - Exemple : <i>Ascaris</i> (Coupe transversale)
TP n°4 : Les Annélides et les Mollusques	- Morphologie des Polychètes (<i>Nereis</i> sp): observation de la région antérieure et parapode (schémas à légender) - Morphologie des Céphalopodes (<i>Sepia officinalis</i>), dissection et dessin - Exemples de Bivalves et de Gastéropodes
TP n°5 : Les Arthropodes : comparaison entre les grands groupes : Arachnides, Myriapodes, Crustacés et Insectes.	- Comparaison entre les grands groupes : Arachnides (scorpion, araignée), Myriapode (mille-pattes ou scolopendre), Crustacés (crevette) et Insectes (criquet) sous forme d'un tableau. - Dissection des appendices de la crevette. - Observation de la morphologie du scorpion.
Projet à demander au début des TP: adaptations au parasitisme chez les différents groupes étudiés	

Classe préparatoire BG Deuxième année

Programme de mathématiques

Table des matières

Révisions – Suites & Fonctions	4
Révisions – Dénombrements & Statistique descriptive	4
Probabilités 3 – Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires	4
Révisions – Nombres complexes et polynômes	6
Révisions – Systèmes linéaires, matrices et déterminants	6
Algèbre linéaire 3 – Espaces vectoriels	6
Révisions – Intégrales et équations différentielles	8
Probabilités 4 – Variables aléatoires à densité	8
Algèbre linéaire 4 – Applications linéaires et matrices	10
Probabilités 5 – Variables aléatoires réelles discrètes	11
Probabilités 6 – Couples de variables aléatoires discrètes	12
Algèbre linéaire 5 – Valeurs propres, vecteurs propres	13
Révisions – Géométrie	14
Géométrie 2 – Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$	14
Révisions – Fonctions de deux variables	15
Statistique 2 – Théorèmes limites et statistique inférentielle	15

Objectifs de la formation

En classe de BG2 l'objectif est, dans le cadre d'un approfondissement de la formation, d'amener l'étudiant à intégrer les différentes étapes permettant de résoudre un problème exprimable de façon mathématique. L'enjeu est la reformulation et la résolution de problèmes issus de contextes ou de réalités a priori non mathématiques (provenant souvent d'autres disciplines). Ainsi sont mises en jeu diverses compétences. Certaines ont déjà été envisagées en première année (BG1), et sont consolidées en seconde année :

1. Engager une recherche, définir une stratégie.
2. Modéliser un phénomène à l'aide du langage mathématique.
3. Représenter, changer de registre.
4. Raisonner, démontrer, argumenter. . .
5. Calculer (symboliquement ou numériquement avec une calculatrice ou un ordinateur), maîtriser le formalisme mathématique.
6. Communiquer à l'écrit.

D'autres constituent des objectifs plus spécifiquement approfondis en seconde année, dans la perspective des concours :

1. Identifier un problème sous différents aspects ;
2. Mobiliser des connaissances scientifiques pertinentes ;
3. Critiquer ou valider un modèle ou un résultat.

Buts visés

Le programme de mathématiques de BG2 approfondit celui de BG1, ce qui se traduit par les enjeux suivants. – Consolider les acquis mathématiques de BG1, notamment en matière de calcul et raisonnement. Par souci de clarté, il a été choisi de numéroté de manière compatible les têtes de chapitre des programmes de BG1 et de BG2. – Généraliser et compléter les concepts introduits en BG1. – Mettre un accent particulier sur la notion de modélisation, où se confrontent les mathématiques et les autres sciences. Équilibre entre compétences Les différentes compétences sont développées puis évaluées (au cours de l'année puis lors des concours) en veillant à leur équilibre. On prend garde en particulier à ne pas surdévelopper une compétence par rapport à une autre. Les capacités en calcul par exemple (point 5 ci-dessus), lorsqu'elles sont propres aux mathématiques, restent relativement simples, l'objectif n'étant pas ici d'aboutir à une virtuosité technique. On attend, en la matière, une maîtrise solide des calculs, concepts et théorèmes mathématiques, dans des situations courantes, sans pour autant négliger les autres compétences. Contenu Le programme de seconde année combine des révisions du programme de première année, des approfondissements de certaines parties et des nouveautés. Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur ; pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée. En algèbre linéaire, le passage de $\mathbb{K}^n$ aux espaces vectoriels généraux permet d'élargir le champ d'action et de donner une vision géométrique des espaces de fonctions. Ce cadre plus systématique permet de donner un sens à l'étude des bases et changements de base qui sont fondamentaux pour aborder les valeurs propres et vecteurs propres des applications linéaires et des matrices ; cette dernière approche se limite à la diagonalisation pour s'en tenir à des phénomènes simples. En vue de nombreuses applications (optimisation, analyse de données), est proposée une présentation du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et du théorème de projection orthogonale. La notion de sous-espaces supplémentaires ne figure pas au programme, mais dans bien des situations le théorème de la projection orthogonale fournit une approche similaire tout en permettant un calcul effectif. L'analyse apparaît sous forme de révision et est constamment présente dans les parties consacrées aux probabilités. C'est ainsi que les séries sont introduites comme outil de base des probabilités, tandis que l'étude des intégrales généralisées est insérée dans la mise en place des variables aléatoires à densité ; l'usage de ces outils est limité aux contextes probabilistes et aux démarches de modélisation ; on évitera les développements artificiels ou purement techniques à ce propos. Enfin, l'étude des couples de variables aléatoires discrètes conduit à définir, de manière très limitée, une notion de séries doubles. L'étude des probabilités est donc un enjeu majeur du programme de seconde année. Le but de ce parcours est de mettre en place, de la manière la plus efficace possible, un contexte opérationnel permettant d'utiliser aussi bien des variables aléatoires discrètes prenant une infinité de valeurs (amenant notamment les lois géométrique et de Poisson) que des variables aléatoires à densité (dites « continues »), avec un accent particulier sur les variables gaussiennes. Pour maintenir le programme dans un volume raisonnable, les couples de variables aléatoires ne sont abordés que pour les variables discrètes, ce qui évite d'avoir à aborder les intégrales doubles. Les démarches de simulation de variables aléatoires sont fortement encouragées. Une présentation de quelques concepts et résultats de statistique inférentielle permet de mettre en place un cadre précis pour les tests d'hypothèse. La variété des modèles ainsi mis en place, combinés avec les différents théorèmes limites proposés, permet d'aborder de nombreuses applications dans les domaines les plus divers ; l'évocation de ces contextes applicatifs est un élément important de la formation et fait partie des buts visés. Comme dans le programme de première année, on signale par un symbole certaines situations particulières où un lien avec d'autres enseignements

scientifiques est encouragé, permettant de donner corps aux démarches de modélisation et d'application pratique des mathématiques. En prolongement des programmes de première année en mathématiques et informatique, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours aux outils informatiques ; le maniement de ces outils fait partie intégrante de la formation et a toute sa place dans l'évaluation en cours d'année et lors des concours. Pour ce qui concerne les révisions, la proposition de consolider les compétences acquises en première année par quelques exercices ne doit pas être prise dans un sens restrictif : des approches numériques, pouvant s'appuyer sur le programme d'informatique ou recourir à des outils logiciels ou des calculatrices, peuvent tout aussi bien renforcer la maîtrise des concepts et de leurs applications. Programme de seconde année La répartition en chapitres proposée ci-dessous (ainsi que l'agencement des chapitres de révisions) est fournie à titre indicatif et ne constitue pas une progression figée ou obligatoire. Les impératifs pédagogiques liés à la préparation aux concours peuvent justifier une organisation différente, sous réserve de maintenir une structure cohérente. Le numérotation des chapitres reprend et complète celle du programme de première année.

Révisions – Suites & Fonctions

- Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 1 et Analyse 5).
- Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 2, Analyse 3, Analyse 6, Analyse 7, Analyse 8).

Révisions – Dénombrements & Statistique descriptive

- Exercices et situations illustrant le programme de première année (Outils 6). L'objectif est de mettre en place des techniques de calcul de cardinaux d'évènements.
- Exercices et situations illustrant le programme de première année (Statistique 1).

Probabilités 3 – Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires

Ce chapitre étend le cadre des probabilités qui avait été posé en première année (Probabilités 1) pour aborder une situation plus générale, se prêtant à la définition des variables aléatoires discrètes ou à densité. Les séries sont introduites ici comme un outil pour donner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors de questions probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation. On présente brièvement à cette occasion d'un point de vue axiomatique l'espérance, la variance et leurs propriétés générales. Elles seront reprises dans chacun des contextes étudiés (variables discrètes et continues).

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Séries réelles

Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente.

La série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$.

En cas de convergence, la somme de la série est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

Combinaison linéaire de séries convergentes.

Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs u_n et v_n telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Critère d'équivalence pour deux séries à termes positifs.

Convergence et somme de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$

(pour $|q| < 1$) et des séries « dérivées » $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et

$\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$

Série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Convergence et somme de la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

Convergence absolue.

Tout autre critère de convergence est hors programme.

Résultat admis.

La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de la série. En vue des applications probabilistes, on admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes. L'étude de séries semi-convergentes est hors programme.

b) Notion de probabilité

Notion de tribu.

On définit à cet occasion la réunion dénombrable d'une famille de partie $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Révision et extension à ce nouveau cadre des propriétés des probabilités et des définitions vues en première année, en particulier :

- Soit $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$. Si $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls telle que la série $\sum_{i \geq 0} p_i$ converge et a pour somme 1, alors il existe une et une seule probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\omega_i) = p_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

- Une suite d'événements (A_n) est un système complet d'événements si les A_n sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est égale à Ω .

- Formule des probabilités totales : si (A_n) est un système complet d'événements, alors, pour tout événement B , la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n \cap B)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n \geq 0} P(A_n \cap B).$$

- Indépendance de deux événements. Indépendance (mutuelle) de n événements ; d'une suite d'événements.

c) Variables aléatoires réelles

On nomme variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$, noté $(X \leq a)$, soit un événement.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $(X \in I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ est un événement.

Fonction de répartition : $F_X : t \mapsto P(X \leq t)$.

Croissance, limites en $\pm\infty$.

Indépendance de deux variables aléatoires. Indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires ; d'une suite de variables aléatoires.

Deux variables X et Y sont indépendantes si, et seulement si pour tous intervalles I et J on a $P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$.

On convient de nommer événements les éléments d'une tribu. Une tribu $\mathcal{T}$ (ou σ -algèbre) sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant Ω , stable par passage au complémentaire et telle que, pour toute suite (B_n) d'événements, la réunion des B_n est un événement. Aucune question sur les tribus ne doit être proposée dans une épreuve de mathématiques.

On met en valeur l'axiome de σ -additivité $P(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)$ pour toute suites (B_n) d'événements deux à deux incompatibles, et on fait remarquer que la série $\sum_{n \geq 0} P(B_n)$ converge.

Les résultats sur la probabilité d'une réunion (resp. intersection) croissante (resp. décroissante) sont hors programme.

On distingue l'événement impossible (resp. certain) des événements de probabilité nulle (resp. de probabilité 1).

Résultat admis.

Pour une telle suite, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Cette formule reste valable dans le cas d'une suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles et tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$. ; on dira dans ce cas que le système est quasi-complet.

Interprétation en termes de probabilités conditionnelles, avec la convention suivante : si $P(A_n) = 0$, alors on pose $P(A_n)P(B|A_n) = 0$.

Aucune vérification du fait qu'une fonction est une variable aléatoire ne sera demandée dans une épreuve de mathématiques.

Résultat admis.

Les propriétés de limites sont admises. On illustre la notion de fonction de répartition au moyen des variables aléatoires finies étudiées en première année. Lorsqu'on a une hypothèse d'expériences indépendantes, les variables associées sont indépendantes.

Résultat admis.

CONTENUS

COMMENTAIRES

Propriétés de l'indépendance mutuelle :

- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, toute sous-famille l'est aussi.
- Si $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $u(X_1, \dots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.
- Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_n(X_n)$ sont indépendantes.

Ces résultats sont admis.

d) Espérance et variance

Espérance. Notion de variable centrée.

En s'appuyant sur le programme de première année, on admet qu'il existe une fonction espérance notée E , définie sur une partie de l'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, possédant au moins les propriétés de linéarité, de positivité et vérifiant $E(1) = 1$.

Généralisation des propriétés et des définitions vues en première année, en particulier :

- Variance et moments d'une variable aléatoire.
- Signe de la variance.
- Écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X .
- Formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- Variance de $aX + b$. Notion de variable centrée réduite.
- Si X est une variable aléatoire admettant une variance non nulle, $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite.
- Si X et Y sont indépendantes, on a :
 $E(XY) = E(X)E(Y)$,
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Ce développement doit rester modeste.

X^* est appelée variable centrée réduite associée à X .

Résultat admis.

Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes.

Compétences attendues : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une probabilité ; calculer la probabilité d'un évènement ; exploiter une hypothèse d'indépendance pour calculer des probabilités.

Révisions – Nombres complexes et polynômes

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Outils 2, Outils 3 et Algèbre).

Révisions – Systèmes linéaires, matrices et déterminants

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Algèbre linéaire 1 et 2).

Algèbre linéaire 3 – Espaces vectoriels

Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité (Kn) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non. La notion de somme de sous-espaces vectoriels n'est pas au programme. On travaille dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Contenus Commentaires

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Structure vectorielle

CONTENUS

Structure d'espace vectoriel. Règles de calcul.

Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

Sous-espaces vectoriels.

Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence).

Famille libre finie. Famille liée finie.

Exemple fondamental de famille libre : toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Base finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence).

Coordonnées d'un vecteur dans une base.

Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.

Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

COMMENTAIRES

On met plus particulièrement en valeur les espaces vectoriels suivants : $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des applications définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'étude d'espaces de suites n'est pas un objectif du programme.

On introduit la notation $\text{Vect}(\{x_1, x_2, \dots, x_k\})$.

D'autres exemples peuvent être proposés, mais les attendus du programme se limitent aux cas mentionnés.

b) Dimension

De toute famille génératrice finie d'un espace E , on peut extraire une base.

Toutes les bases de E ont le même cardinal ; ce nombre commun est appelé dimension de E .

On dit alors que E est un espace vectoriel de dimension finie.

Dans un espace vectoriel de dimension n :

- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Une famille libre ayant n éléments est une base.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.
- Une famille génératrice ayant n éléments est une base.

Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales, alors $F = E$. Rang d'une famille finie de vecteurs.

Ce résultat et le suivant sont admis.

Compte tenu des objectifs pédagogiques, la plupart de ces énoncés doivent être admis, mais on peut montrer comment certains de ces résultats peuvent en impliquer d'autres.

Ce rang peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

Compétences attendues : trouver une base et la dimension d'un espace vectoriel ; calculer le rang d'une famille finie de vecteurs ; capacités d'abstraction (ou d'adaptation) pour concevoir une fonction, un polynôme ou une matrice comme un vecteur.

Révisions – Intégrales et équations différentielles

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 9). Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 4 et Analyse 10).

Probabilités 4 – Variables aléatoires à densité

Ce chapitre reprend les probabilités dites « continues » (présentées en classe terminale) en les insérant dans un contexte cohérent avec ce qui précède, et met en place les modèles continus les plus courants : uniforme, exponentiel, normal. Les intégrales généralisées sont introduites ici pour définir les variables aléatoires à densité. En dehors de questions probabilistes, les intégrales généralisées ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Intégrales généralisées

Convergence d'une intégrale généralisée (ou impropre) d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.

Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sur cet intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.

Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres.

Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.

Cas des fonctions paires ou impaires.

Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que $f \leq g$.

Critère d'équivalence pour deux fonctions positives f et g .

Convergence absolue d'une intégrale généralisée.

Intégrales de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive.

Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.

On souligne la nécessité de confirmer la convergence de tous les termes apparaissant dans une telle formule. Si la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_a \varphi$ et $\beta = \lim_b \varphi$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β , alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ convergent ou divergent simultanément, et ont la même valeur lorsqu'elles convergent.

Tout autre critère de convergence est hors programme.

La convergence absolue est présentée comme une condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale.

Les intégrales semi-convergentes sont hors programme.

La valeur de cette intégrale est un résultat admis.

b) Variables aléatoires admettant une densité

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Une telle fonction, qui n'est pas unique, est appelée densité de X .

On peut alors exprimer la probabilité d'un événement du type $P(X \in I)$ (I étant un intervalle) au moyen d'une intégrale.

CONTENUS

X admet une densité si, et seulement si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemples de recherche de la loi du minimum et du maximum de deux ou de n variables aléatoires indépendantes.

Si une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1 alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité.

Espérance. Propriétés.

Théorème de transfert.

Inégalité de Markov.

Variance, écart-type, moments. Propriétés.

COMMENTAIRES

Résultat admis.

Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X , c'est justifier que X admet une densité et en donner une.

Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.

Résultat admis.

Une telle fonction est dite densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

La linéarité de l'espérance est admise.

Résultat admis.

Reprise rapide des définitions et propriétés vues dans le chapitre Probabilités 3.

c) Lois usuelles

Loi uniforme : densité, fonction de répartition, espérance, variance.

$\Rightarrow$ La loi uniforme sur $[a, b]$ modélise le choix au hasard d'un réel entre a et b ; les fonctions de « nombre au hasard » incluses dans les calculatrices et langages de programmation permettent de simuler la loi uniforme; ces questions sont présentées en lien avec l'enseignement d'informatique.

Loi exponentielle : densité, fonction de répartition, espérance, variance.

$\Rightarrow$ On met en valeur la propriété d'invariance temporelle : $P(X \geq s + t | X \geq s) = P(X \geq t)$ et on donne quelques exemples d'expériences donnant du sens à cette propriété.

Loi normale (ou gaussienne) centrée et réduite : densité, espérance et variance.

$\Rightarrow$ La loi exponentielle peut être simulée à partir d'une simulation de la loi uniforme sur $]0, 1[$.

On obtient les valeurs de la fonction de répartition (notée Φ) et de sa réciproque (dite fonction des quantiles et notée $\alpha \mapsto u_\alpha$) au moyen de la table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi normale de paramètres μ et σ^2 ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) : densité, espérance et variance.

Si X suit une loi normale, alors $aX + b$ aussi si $a \neq 0$.

Pour une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on se ramènera le plus souvent à la variable centrée réduite associée.

d) Sommes de variables aléatoires à densité indépendantes

Loi de la somme de deux variables indépendantes à densité.

Le résultat est admis.

La formule du produit de convolution devra être rappelée en cas de besoin.

Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes.

Le calcul montrant la normalité de la somme n'est pas un attendu du programme. On généralise le résultat au cas de n variables gaussiennes indépendantes.

Compétences attendues : justifier le fait qu'une variable aléatoire admet une densité ; calculer une espérance et une variance ; appliquer la formule du produit de convolution.

Algèbre linéaire 4 – Applications linéaires et matrices

Le passage aux espaces vectoriels quelconques pousse à redéfinir les notions liées aux applications linéaires. Il convient de faire cette adaptation avec une certaine brièveté afin de garder tout le temps requis pour traiter des exemples. On travaille dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Applications linéaires

Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme.
Espaces isomorphes.

Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque.

Propriétés de ces opérations.

Noyau. Lien avec l'injectivité.

Image. Lien avec la surjectivité.

On introduit les notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$, mais leur étude n'est pas un attendu du programme.

Notation f^n pour $n \geq 0$.

On montre que le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

On montre que l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.

b) Cas de la dimension finie

Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.

Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base.

Rang d'une application linéaire.

Théorème du rang.

Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension (finie), il y a équivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité.

Tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Résultat admis.

c) Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel de dimension finie, une base ayant été choisie dans chacun d'eux.

Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque.

Interprétation d'une matrice comme application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

On montre qu'un endomorphisme est bijectif si, et seulement si, sa matrice, dans une base quelconque, est inversible, et qu'il suffit pour cela de disposer d'une matrice inverse à gauche ou à droite. Lien avec le déterminant

Cette interprétation permet de parler d'image, noyau et de rang de la matrice en lien avec les mêmes notions pour les applications linéaires.

d) Changement de base

Changement de base. Matrice de passage.

Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur.

Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.

CONTENUS

COMMENTAIRES

Matrices semblables.

On met en valeur l'intérêt des matrices semblables pour le calcul des puissances.

Compétences attendues : obtenir la matrice d'une application linéaire dans des bases données ; déterminer un noyau et une image ; opérer un changement de bases ; démontrer que deux matrices sont semblables.

Probabilités 5 – Variables aléatoires réelles discrètes

L'ensemble de ce chapitre donne l'occasion de revoir, par le biais d'exercices, les lois de probabilités finies présentées dans le programme de première année (Probabilités 2).

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Variables aléatoires réelles discrètes

Une variable aléatoire réelle est dite discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ de ses valeurs est indexé par une partie de $\mathbb{N}$.

Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Espérance. Propriétés.

Théorème de transfert.

Inégalité de Markov.

Variance, écart-type, moments. Propriétés.

On met en valeur le système complet formé des événements $(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Résultat admis.

Reprise rapide des définitions et propriétés vues dans le chapitre Probabilités 3.

b) Lois usuelles discrètes

Loi de Poisson. Espérance, variance.

Approximation dans certains cas d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Loi géométrique. Espérance et variance.

On illustrera cette approximation à l'aide d'histogrammes.

On présente la loi géométrique comme loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

$\Rightarrow$ Propriété d'invariance temporelle de la loi géométrique. Exemples de situations expérimentales modélisées par une loi géométrique.

Compétences attendues : modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une variable aléatoire ; calculer une espérance ; calculer une variance.

Probabilités 6 – Couples de variables aléatoires discrètes

Ce chapitre permet, par le maniement de sommes de séries, d'avoir une approche assez complète des phénomènes liés aux couples de variables aléatoires : lois conjointes, lois marginales, indépendance. Le programme se limite aux situations faisant intervenir des couples de variables aléatoires à valeurs positives et des séries doubles à termes positifs.

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Séries doubles à termes positifs

Notion de suite double (indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Pour toute suite double $(u_{n,p})$ de réels positifs ou nuls,

on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ dès que l'une des deux

expressions est constituée de séries convergentes.

Résultat admis.

La justification de la convergence se fait au cours du calcul de la somme double.

b) Couples de variables aléatoires discrètes

Couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes positives. Loi conjointe.

Lois marginales.

Lois conditionnelles.

Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$ pour une fonction u positive.

L'évènement $((X = x) \cap (Y = y))$ est également noté $(X = x, Y = y)$.

Résultat admis.

Justification de $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Covariance. Variance de $X + Y$.

Deux variables discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Résultat admis.

Loi conjointe de deux variables discrètes indépendantes.

On remarque que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Propriétés de l'indépendance : pour deux variables discrètes X et Y indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X, Y)$, le couple (X, Y) ayant une loi conjointe connue.

On s'intéressera en particulier au maximum et au minimum de 2 ou de n variables aléatoires indépendantes.

Cas particulier de la somme de deux variables discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Les deux variables ne sont pas nécessairement indépendantes.

Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson.

Généralisation au cas de n variables.

Compétences attendues : trouver les lois marginales ; démontrer que deux variables sont indépendantes.

Algèbre linéaire 5 – Valeurs propres, vecteurs propres

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Éléments propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrice carrée.

On appelle spectre de l'endomorphisme f (respectivement de la matrice A), l'ensemble des valeurs propres de f (respectivement de A).

En dimension finie, on fait le lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux d'une matrice qui le représente dans une base.

Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.

Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.

b) Diagonalisation

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable.

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n .

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Pratique de la réduction des matrices carrées

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n .

On fait observer que les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit sous la forme $M = PDP^{-1}$, où D est diagonalisable et P désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M .

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Compétences attendues : diagonaliser une matrice ; calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans moyens de calcul).

Révisions – Géométrie

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Géométrie 1).

Géométrie 2 – Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Ce chapitre propose une extension modeste des notions de géométrie euclidienne à l'espace euclidien de dimension n , avec la mise en place de deux résultats fondamentaux pour les applications : la projection orthogonale sur un sous-espace d'une part et la diagonalisation des matrices symétriques d'autre part. Dans ce chapitre, les mots « vecteur » et « point » peuvent être considérés comme interchangeables.

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Écriture matricielle.
Bilinéarité.
Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire.
Vecteurs orthogonaux.

Notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$

La discussion des cas d'égalité n'est pas un objectif du programme.
L'orthogonalité d'une famille de vecteurs non nuls entraîne sa liberté. Théorème de Pythagore.

Bases orthonormales de l'espace $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

On souligne le fait que le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales.

On réinterprète la définition en termes de matrice de passage P de la base canonique à une base orthonormale (relation ${}^t P P = I_n$).

Les algorithmes d'orthonormalisation ne sont pas au programme.

Toute matrice carrée symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Il s'agit de l'énoncé suivant (qui est admis) : si A est une matrice symétrique réelle il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = P D P^{-1}$ avec $P^{-1} = {}^t P$.

b) Projection orthogonale

Distance entre deux vecteurs (ou points).

Définition de la distance d'un vecteur (ou point) à une partie non vide.

Cette notion peut être interprétée en tant que démarche d'optimisation voire de meilleure approximation.

On appelle projection orthogonale sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ un endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ tel que : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $p(x) \in F$ et pour tout $y \in F$, $p(x) - x$ est orthogonal à y .

On rappelle que les notions générales de sommes de sous-espaces vectoriels et de projections ne sont pas au programme.

Existence et unicité de la projection orthogonale p sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.

On admet qu'il existe une base orthonormale du sous-espace F .

Écriture de la projection orthogonale dans une base orthonormale de F .

Relation $p \circ p = p$.

$\text{Im}(p) = F$.

On remarque que $\text{Ker}(p)$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux aux vecteurs de F .

Distance d'un vecteur (ou point) à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2.

Compétences attendues : calculer une projection orthogonale, une plus courte distance.

Révisions – Fonctions de deux variables

Exercices et situations illustrant le programme de première année (Analyse 11).

Statistique 2 – Théorèmes limites et statistique inférentielle

L'objectif de ce chapitre est d'initier les étudiants au vocabulaire et à la démarche de la statistique inférentielle sur quelques cas simples, en leur présentant le problème de l'estimation par intervalle et du test de conformité. Il ne doit en aucun cas faire l'objet d'un développement théorique. On pourra illustrer par des exemples pris dans la vie courante et dans les autres disciplines.

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Vocabulaire de l'échantillonnage et de l'estimation

X étant une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2 , un n -échantillon de X est un n -uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

Un estimateur d'un paramètre (μ ou σ^2) est une suite (T_n) de variables aléatoires, chaque T_n étant une fonction de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ donnant de l'information sur le paramètre choisi.

- La moyenne empirique, notée M_n et définie par

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ est un estimateur de } \mu.$$

- La variance empirique, notée S_n^2 , et définie par

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - M_n^2, \text{ est un estimateur de } \sigma^2.$$

La valeur de T_n obtenue à partir d'un échantillon observé est l'estimation du paramètre.

Aucun développement ne sera fait sur les estimateurs et on se limitera aux deux estimateurs cités ci-dessous. On définit l'erreur d'estimation comme la différence entre l'estimateur et la valeur du paramètre, et le biais comme l'espérance de l'erreur d'estimation.

La variable M_n est souvent notée $\bar{X}_n$.

On remarque que M_n est un estimateur sans biais de μ et que la variance de l'erreur d'estimation $M_n - \mu$, qui vaut $\frac{\sigma^2}{n}$, tend vers 0.

On remarque que le biais de S_n^2 tend vers 0.

L'usage de l'estimateur corrigé de la variance $S_n'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$, parfois employé dans les applications, n'est pas un objectif du programme.

b) Théorèmes limites

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres.

Théorème central limite (première forme) :

Étant donnée une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ de même loi, admettant une espérance μ et une variance σ^2 non nulle, alors, pour tous réels a, b tels que $a < b$, en posant $M_n^* = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, on a :

$$P(a < M_n^* < b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Théorème admis.

On obtient ainsi une approximation asymptotique de la loi de l'erreur d'estimation réduite $\varepsilon(M_n) = M_n^*$.

$\Rightarrow$ Illustration numérique de cette convergence à l'aide de tirages répétés d'une loi uniforme ou exponentielle.

CONTENUS

COMMENTAIRES

Cas de la loi binomiale : théorème de de Moivre–Laplace.

Théorème central limite (seconde forme) : Étant donnée une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$ de même loi, admettant une espérance μ et une variance, alors, pour tous réels a, b tels que $a < b$, on a :

$$P(a < \frac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} < b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$S_n = \sqrt{S_n^2}$ désignant l'écart-type empirique.

Théorème admis. Cette version est utilisée lorsqu'on ne connaît pas σ^2 .

c) Applications statistiques

Intervalle de confiance :

$$P([M_n - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < M_n + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha$$

où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Test de conformité sur la moyenne : pour tester l'hypothèse $(H_0) : \mu = \mu_0$, on utilise que

$$P(|\frac{M_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$$

Ce résultat est une conséquence directe de la seconde forme du théorème central limite. On en déduit une fourchette d'estimation du paramètre μ , appelé aussi intervalle de confiance de niveau de confiance $1 - \alpha$.

Ce résultat est une conséquence directe de la seconde forme du théorème central limite. On rejette l'hypothèse si la valeur observée de $\frac{M_n - \mu_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$ est en dehors de l'intervalle $[-u_{1-\frac{\alpha}{2}}, u_{1-\frac{\alpha}{2}}]$

Compétences attendues : trouver un intervalle de confiance de la moyenne ; faire un test de conformité sur la moyenne.

Programme de physique de BG 2^{ème} année

Répartition horaire par thème:

	Thème	Nbre d'heures pour la formation disciplinaire	Nbre d'heures pour la formation expérimentale	Nbre heures TD
Semestre 1	Mécanique	8h	-	6h
	Phénomènes de Transport	14h	6h	6h
	Thermodynamique	11h	3h	10h
Semestre 2	Signal et Rayonnement	13h	12h	10h
	Mécanique des fluides	14h	3h	12h
Total		60h	24h	44h

Nombre de semaines d'enseignements 26 semaines.

Nombre d'heures d'enseignements de cours intégrés : 4h/semaine

Nombre d'heures d'enseignements des travaux pratiques 1h/semaine

Formation Disciplinaire

Capacités exigibles

Partie 1 : Thermodynamique.

I. Thermodynamique

L'enseignement de thermodynamique de deuxième année reprend et développe les notions de thermodynamique physique étudiées en première année. L'enthalpie libre G , considérée comme une fonction de la température, de la pression et des quantités de matière, est introduite pour l'étude des transformations physiques à pression et température constantes. L'étude des diagrammes binaires porte sur des diagrammes isobares ; ceux-ci seront fournis ou construits à partir de données expérimentales.

1- Fonctions Thermodynamique, Coefficients Calorimétriques

Rappel sur le premier et second principe

Fonctions thermodynamiques

Relier qualitativement la variation de température lors d'une détente de Joule – Gay-Lussac aux propriétés d'un gaz.

Exprimer la variation d'énergie interne et la variation d'enthalpie sous une forme différentielle ou finie. Utiliser les grandeurs molaires et massiques. Exploiter l'extensivité

Les coefficients calorimétriques	de l'énergie interne et de l'enthalpie. Déterminer un transfert thermique à partir de la variation de la fonction d'état la plus adaptée. Établir l'expression d'une variation d'entropie en fonction des variables d'état les plus adaptées. Démontrer et utiliser la loi de Laplace.
2- Les Potentiels thermodynamiques Potentiels thermodynamiques Transformation monotherme Transformations monotherme et monobare	Relier les grandeurs V, S et μ aux dérivées partielles de G^*. Démontrer la relation de Gibbs-Helmholtz. Interpréter l'influence d'une variation de pression ou de température sur le potentiel chimique. Relier la variation de l'enthalpie libre et la création d'entropie lors d'une transformation spontanée à T et P constantes. Approche documentaire : A partir de documents sur la pression osmotique, analyse d'applications, au laboratoire, dans l'industrie ou dans le vivant, de l'influence de la pression sur le potentiel chimique.
3- Changements d'état d'un corps pur Phénomènes de changement de phases Diagramme de phase température – pression Intervention du paramètre volume : diagramme de Clapeyron volume –	Interpréter la condition d'équilibre par une égalité de potentiels chimiques. Relier, pour un équilibre entre deux phases, les grandeurs H, S et V aux grandeurs massiques ou molaires associées et au titre en vapeur. Utiliser la relation entre les entropies molaires (massiques) et les enthalpies molaires (massiques) de changement d'état. Construction et lecture de diagrammes d'équilibre de systèmes binaires. Diagramme liquide-vapeur isobare avec miscibilité totale à l'état liquide ; azéotrope. Diagramme liquide-vapeur isobare avec miscibilité nulle à l'état liquide ;

pression.	hétéroazéotrope.
Condition d'équilibre d'un corps pur sous deux phases	Exploiter un faisceau de courbes d'analyse thermique pour établir l'allure d'un diagramme binaire. Attribuer les différentes zones du diagramme. Calculer et commenter la valeur de la variance en un point du diagramme. Repérer un point azéotropique ou hétéroazéotropique. Déterminer la composition d'un système en un point donné du diagramme.
Calorimétrie	Réaliser un bilan enthalpique dans le cas d'un changement d'état. Réaliser des mesures calorimétriques à l'aide d'une méthode électrique ou par mélange.

Partie 2: Phénomènes de transports

II. Phénomènes de transport

Cette partie présente le cadre conceptuel et des applications pratiques des phénomènes de transport. Différents modes de transport sont envisagés : transport de matière ou d'énergie dans un milieu au repos (conduction électrique, thermique, diffusion de matière) et transport convectif de masse et d'énergie. Leur étude se limite au cas du régime permanent. Est d'abord étudié le transport par conduction dans un milieu immobile; le flux de charges, de chaleur ou de matière est conditionné par une différence de potentiel électrique, de température ou de concentration. La conduction électrique pourra être illustrée par des transferts de charge en milieu biologique ou en conductimétrie. Les analogies entre les transports par conduction sont systématiquement exploitées : la notion de résistance thermique est introduite par analogie avec la résistance électrique. De même, l'étude du transport de matière par diffusion est conduite en parallèle avec les approches précédentes, les équations de transport y sont établies par analogie avec la conduction thermique.

Est ensuite abordé le transport de masse et d'énergie par convection. Le bilan d'énergie sur un système ouvert est effectué uniquement pour un régime permanent. Il permet de modéliser les échanges d'énergie dans un élément d'une machine thermique.

1- Conduction électrique

Rappel sur le flux d'une grandeur extensive.

Conduction électrique et loi d'Ohm locale

Utiliser les expressions des surfaces usuelles (cylindre, disque). Choisir, en fonction de la symétrie du transport, la surface appropriée à la détermination d'un flux. Exprimer le flux dans le cas de symétries simples (axiales, radiales cylindrique).

Exprimer la résistance électrique d'un conducteur dans le cas d'un transport de

Résistance électrique	vecteur densité de courant uniforme.
2- Conduction thermique Différents modes de transfert thermique Résistance thermique. Loi de Fourier. Bilan de transfert de chaleur Exemples d'application	Réaliser une analogie entre la conduction électrique et la conduction thermique. Interpréter une association de résistances thermiques. Citer des exemples de la vie courante. Établir, dans le cas d'un transport unidirectionnel, un bilan local d'énergie, avec source volumique ou avec échange à travers la paroi. Exprimer le temps caractéristique d'un régime transitoire par analyse dimensionnelle. Établir un bilan global d'énergie dans le cas d'un transport radial cylindrique en régime permanent. Exprimer le champ de température en régime permanent, après avoir proposé des critères plausibles de continuité ou de non divergence.
3- Diffusion de matière Transferts de masse par convection ou diffusion. Loi de Fick. Bilan de transport par analogie	Citer les deux modes de transfert de masse. Interpréter le transport par diffusion à l'aide du potentiel chimique. Procéder par analogie lors de la réalisation de bilans local ou global entre les phénomènes de conduction thermique et de diffusion de matière, les capacités exigibles étant identiques.
4- Transport de masse et d'énergie par convection. Système ouvert Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert. Applications à quelques machines	Justifier le caractère conservatif d'un flux de masse en régime permanent. Établir un débit volumique à partir d'un débit

élémentaires. - Compresseurs et/ou détendeurs - échangeurs de chaleur - Régime permanent dans une conduite (Bernoulli, détente isenthalpique de joule Thomson) Machine Thermique	massique dans le cas d'un écoulement incompressible. Savoir que le flux convectif d'une grandeur est le produit du débit massique par la grandeur massique correspondante. Formuler le premier principe sur un système ouvert sous forme d'un bilan élémentaire et en termes de puissance. Appliquer le premier principe en système ouvert et en régime permanent à des éléments simples d'une machine thermique : échangeur thermique, compresseur, détendeur isenthalpique, mélangeur. Réaliser un bilan local sur un échangeur thermique monodimensionnel. Estimer à partir des différents éléments d'une machine pris séparément le travail utile et le transfert thermique en termes de puissances ou de grandeurs massiques. Établir le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique.
---	---

Partie 3: Signal et rayonnement

III. Signal et rayonnement

De nombreux phénomènes en physique linéaire peuvent être modélisés par un oscillateur électrique amorti. Cet oscillateur joue un rôle central tant par son étude en régime transitoire qu'en régime sinusoïdal forcé. Un des objectifs de cet enseignement est l'acquisition progressive d'un outil mathématique riche et adapté tout en permettant un réinvestissement dans des domaines très divers. Le support que constitue l'approche expérimentale doit donner à l'étudiant les appuis nécessaires à l'assimilation de ces notions. En complément du chapitre II « Signaux physiques » de première année, l'enseignement de seconde année prolonge les notions abordées par l'étude de filtres électroniques en régime sinusoïdal forcé. Les objectifs ne sont pas ici d'établir la fonction de transfert complexe d'un filtre mais bien de comprendre l'influence de ce dispositif sur un signal électrique périodique et sa capacité à sélectionner une fréquence. De manière symétrique, cette capacité, abordée en électricité avec les filtres, est réinvestie en optique ondulatoire avec l'étude d'un réseau plan dans un montage monochromateur. L'approche du réseau sera exclusivement expérimentale, la formule étant donnée. Cet enseignement est enfin l'occasion de découvrir l'imagerie par échographie ultrasonore. Cette technique est ici choisie de par son importance parmi l'ensemble des techniques d'imagerie à usage médical. Les propriétés des dioptries acoustiques seront décrites par analogie avec celles des dioptries optiques. La constitution d'une image est présentée par la mesure du temps d'écho sur un dioptre acoustique, enrichie par les informations apportées par l'effet Doppler. Les objectifs de cet enseignement sont de familiariser les étudiants avec les principes physiques de constitution d'une image et avec les méthodes modernes de traitement numérique, en lien avec le programme d'informatique.

1- Dipôles Electriques	Etudier un dipôle électrique dans un circuit en traçant la droite de charge à côté de la caractéristique électrique $I(V)$. Déterminer le point de fonctionnement. Etudier comme exemple d'un dipôle électrique la diode en régime statique.
2- Régimes Variables au cours du temps Oscillateurs libres amortis. Régime sinusoïdal forcé. Les filtres.	Établir l'équation différentielle régissant l'oscillateur. Faire le lien avec l'oscillateur mécanique. Identifier la nature du régime : pseudopériodique ou apériodique. Déterminer le coefficient d'amortissement et la pseudo-période à partir d'un graphe ou de la solution fournis. Montrer que l'oscillateur harmonique est un cas limite de l'oscillateur amorti. Réaliser un montage permettant de visualiser l'évolution temporelle d'une grandeur électrique dans un circuit RLC. Savoir utiliser la notation complexe dans une situation où une équation linéaire intervient. Définir l'amplitude et le déphasage d'une grandeur. Utiliser les impédances associées à un résistor, un condensateur idéal et une bobine idéale. Représenter des schémas équivalents à basse fréquence et à haute fréquence. Utiliser les lois de Kirchhoff et les théorèmes dérivés en régime sinusoïdal forcé. Calculer l'amplitude d'une grandeur électrique. Exprimer la condition pour que deux grandeurs électriques soient en phase. Mesurer le déphasage entre deux grandeurs. Définir un filtre. Identifier la nature d'un filtre passe-bas, passe-haut ou passe-bande à partir d'une fonction de transfert donnée. Mesurer le facteur d'amplification d'un filtre et le déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie.
3- Application à la production et l'analyse des signaux Onde progressive sinusoïdale dans le cas d'une propagation unidimensionnelle linéaire et non dispersive. Célérité, périodicité spatiale et temporelle.	Écrire le signal sous la forme: $A \cos(\omega(t - x/c))$ ou $A \cos(\omega(t + x/c))$. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité.

Partie 4: Mécanique

IV. Mécanique

L'enseignement de mécanique de deuxième année complète celui de mécanique du point de première année ; il aborde la statique du solide et traite le cas particulier de la force gravitationnelle comme force centrale dont l'étude doit se faire pour donner une idée sur le mouvement des astres. Dans cette partie on aussi traite de l'oscillateur mécanique amorti. L'étude de celui-là est à rapprocher de celle de l'oscillateur électrique amorti. Leurs présentations doivent exploiter les profondes analogies entre oscillateurs mécanique et électrique, et sont conditionnées par les choix pédagogiques du professeur.

1- Statique des solides

Centre de masse d'un solide.

Définir le centre de masse d'un solide.

Moment d'une force par rapport à un axe fixe. Bras de levier.

Algébriser les moments de forces. Exprimer le moment d'une force dans un problème bidimensionnel en utilisant le bras de levier ou une projection appropriée.

Condition d'équilibre d'un solide dans un référentiel Galiléen

À partir de situations simples prises dans le domaine biomécanique par exemple, écrire les conditions nécessaires à l'équilibre d'un solide (nullité des résultantes des forces et de la somme des moments).

2- Forces conservatives

Forces gravitationnelles

Ecrire l'expression de la force gravitationnelle. Donner l'équation polaire de la trajectoire $= f(\theta)$, exprimer les paramètres de cette trajectoire et déterminer les natures possibles.

Energies

Relier la force au gradient de l'énergie potentielle. Démontrer le caractère conservatif d'une force dérivant d'une énergie potentielle. Exprimer les énergies potentielle, cinétique et mécanique et associé cette énergie à la nature de la trajectoire.

Trajectoires elliptiques

Etudier le cas particulier d'une trajectoire elliptique et déterminer ces paramètres.

Mouvement des astres

Enoncer les trois lois de Kepler. Retrouver la loi des aires.

	Approche Documentaire:
3- Oscillateurs mécanique	Établir l'équation différentielle du mouvement. Faire le lien avec l'oscillateur électrique.
Partie 5: Mécanique des fluides	
<u>V. Mécanique des fluides</u> L'enseignement de mécanique des fluides dans la filière BG est l'occasion d'apporter des éléments de réflexion nécessaires à la compréhension de phénomènes naturels (météorologie, circulation sanguine...). Les lois de conservation de la masse et de l'énergie sont présentées sous la forme de bilans globaux sur un volume de contrôle fini. La conservation de l'énergie pour l'écoulement d'un fluide parfait permet d'introduire la notion de charge exprimée en pascal et homogène à une densité volumique d'énergie. Dans le cadre des écoulements réels, l'enseignement en BG privilégie la détermination et l'interprétation de la valeur du nombre de Reynolds. Un des objectifs est ici de pouvoir valider l'utilisation de certaines lois. Les exemples d'écoulements à bas nombre de Reynolds sont choisis dans les domaines des sciences de la vie et de la terre. L'approche expérimentale doit permettre non seulement de maîtriser la manipulation de certains dispositifs simples (manomètres) mais aussi d'adapter à des situations réelles les lois de la mécanique des fluides.	
1- Statique des fluides Particule de fluide, échelle mésoscopique Densité volumique des forces de pression Équation de la statique des fluides Forces pressantes Poussée d'Archimède	Connaitre les forces de volume, les forces de surface. Établir le lien entre la densité volumique d'une force de pression et le gradient de pression. Rappeler l'équation locale de la statique des fluides et utiliser le système de coordonnées adaptées à son intégration. Exprimer la force pressante exercée sur une surface plane soumise à une pression uniforme. Démontrer et utiliser le théorème d'Archimède. À partir de situations simples prises dans le domaine des géosciences, utiliser le théorème d'Archimède.

2- Tension superficielle, Capillarité Notion de tension superficielle Loi de Laplace Angle de raccordement (trois phases en contact), ménisques Ascension et dépression capillaire (Loi de Jurin) Applications sur les phénomènes des tensions superficielles	Définir la tension superficielle au niveau d'une interface de deux milieux de natures différentes. Etablir la loi de Laplace liant la variation de pression au coefficient de tension superficielle et le rayon de courbure de la surface. Définir les angles de raccordement entre diverses phases solide-liquide, solide-gaz et liquide-gaz. Etablir la loi de Jurin Application et observations: bulles, force de rappel, extrémité de tube. Applications-observations: aiguille, basilic, flottation, lotus et surfactant pulmonaire. Cohésion d'un liquide (montée de la sève dans les grands arbres).
3- Dynamique des fluides Éléments de la cinématique des fluides Bilan Energétique.	Identifier le vocabulaire spécifique à la description du mouvement d'un fluide (trajectoire, ligne de courant). Décrire une ligne de courant dans le cas d'un écoulement permanent. Interpréter un document (schéma, photo d'un écoulement) : profil de vitesse, lignes de courant. Etablir un bilan d'énergie mécanique dans le cas d'un écoulement monodimensionnel et permanent d'un fluide incompressible. Exprimer le travail utile massique dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait.
4- Dynamique des fluides Parfait Equation de Bernoulli	Écrire et interpréter la conservation de l'énergie volumique. Utiliser la conservation de la charge le long d'une ligne de courant d'un écoulement permanent d'un fluide parfait et incompressible. Mesure des vitesses : Tube de Pitot.

Applications:	Effet Venturi : Trompe à eau sténose.
5- Dynamique des fluides visqueux Viscosité: phénomène macroscopique i.e. résistance au mouvement, chute, sédimentation, Stokes, valeurs de viscosité, faibles / grandes vitesses Viscosité: phénomène microscopique, Force de viscosité d'un fluide Newtonien Loi de Poiseuille, profil de vitesse, débit et vitesse moyenne Résistance hydraulique. Applications observations: transfusion sanguine,... Notion de régime turbulent et nombre de Reynolds. Écoulement dans un milieu poreux. Porosité, Pression effective, Perméabilité, Loi de Darcy.	Identifier les propriétés des fluides newtoniens soumis à un cisaillement simple plan. Identifier les conditions d'application de la loi de Stokes. Exprimer le taux de déformation dans le système de coordonnées approprié à la géométrie de l'écoulement. Donner le lien entre la force tangentielle de viscosité et le taux de déformation. Établir l'expression du débit volumique dans le cas d'un écoulement dont le profil de vitesse est donné. Utiliser la pression motrice dans le cas d'une dénivellation. Définir la résistance hydraulique d'une conduite. Procéder par analogie avec les associations de résistances électriques pour proposer un modèle simplifié de la circulation sanguine. Calculer et interpréter le nombre de Reynolds d'un écoulement dans un conduit ou autour d'un obstacle. Connaître des ordres de grandeur du nombre de Reynolds permettant de différencier les régimes d'écoulements laminaire et turbulent. Définir la porosité d'un milieu. Établir le lien entre la porosité d'un milieu et la perméabilité dans le cadre d'un modèle simplifié de capillaires parallèles. Approche documentaire : Illustrer un processus de sédimentation.

*Répartition horaire et programme de Physique pour la 1^{ère} Année préparatoire section
Biologie-Géologie*

Thèmes	Nbre d'heures pour la formation disciplinaire	Nbre d'heures pour la formation expérimentale	Nbre heures TD
Signaux physiques, bilans et transports	20h	12h	14h
Optique Géométrique	15h	6h	10h
Thermodynamique	18h	9h	12h
Mécanique du point	17h	3h	14h
Total	70h	30h	50h

Nombre de semaines d'enseignements 30 semaines.

Nombre d'heures d'enseignements de cours intégrés : 4h/semaine

Recommandations : Les 4 heures d'enseignements sont assurées par un même enseignant et il est souhaitable que les travaux pratiques (1 heure/semaine) soit aussi assuré par l'enseignant du cours.

Formation disciplinaire	Nombre de TD	Nombre heures Cours
Partie 1 : Mesures, unités et incertitudes.		
Partie 1 : Signaux physiques, bilans et transports		
Chapitre 1 : Le signal : dépendance temporelle I- Définitions: 1- Le signal 2- Le Bruit 3- Théorie du signal 4- Traitement du signal 5- Traitement de l'information II- Classification des Signaux 1- Représentation temporelle d'un signal 2- Représentation spectrale d'un signal 3- Classification morphologique III- Quelques signaux élémentaires IV- Grandeurs caractéristiques du signal 1- Rappels sur les signaux alternatifs et périodiques 2- Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal périodique 3- Caractéristiques d'un signal alternatif sinusoïdal	1 TD de 2h	2h
Chapitre 2 : Le signal : Analyse spectrale et dépendance spatio-temporelle I- Analyse spectrale d'un signal : 1- Superposition de deux signaux sinusoïdaux	1 TD de 2h	5h

1-1 Signaux sinusoïdaux de même fréquence 1-2 Signaux sinusoïdaux de fréquence voisine : battements 2- Décomposition harmonique : notion de spectre 3- Généralisation : décomposition d'un signal périodique en série de Fourier 4- Intérêt de l'analyse spectrale par rapport à l'observation temporelle II– Signal dépendant du temps et d'une coordonnée d'espace (dépendance spatiotemporelle) 1- Exemples d'ondes : dépendance spatiotemporelle 2- Onde progressive 3- Onde plane 4- Onde plane progressive sinusoïdale ou harmonique (OPPH) - Célérité, double périodicité et vecteur d'onde III– Exemple : Onde sonore 1- Caractéristiques d'un son ; Niveau sonore en dB 2- Approche documentaire : Analyse spectrale d'un son <i>Comme signal physique l'étudiant possède tous les éléments de base pour étudier comme exemple d'OPPH l'onde sonore.</i>		
Chapitre 3 : Bilan macroscopique I- Notion de système 1- Définitions 2- Echanges que peut subir un système 3- Surface et volume de contrôle 4- Grandeur extensive, grandeur intensive II- Notion de flux d'une grandeur extensive (ou débit) 1- Définition 2- Flux de matière 3- Flux de charges ou intensité électrique 4- Flux d'énergie ou puissance 5- Régime stationnaire, régime non stationnaire III- Bilan au sein d'un système siège d'un transport. 1- Equation de bilan au sein d'un système 2- Cas particulier d'un régime stationnaire – loi des nœuds	1 TD de 2h	3h
Chapitre 4 : Résistances aux transports Analyse des causes des transports 1- Origine des phénomènes de transport : inhomogénéité d'un potentiel 2- Cas des transferts conductifs (ou diffusifs) linéaire: notion de résistance 3- Associations de résistances en série, en parallèle	1 TD de 2h	2h
Chapitre 5 : Circuits dans l'approximation des régimes quasi stationnaires I- Les bases de l'électrocinétique en régime stationnaire 1- L'intensité du courant 2- Différence de potentiel : tension II- Dipôles linéaires 1- Caractéristique d'un dipôle 2- Court-circuit et coupe-circuit 3- Dipôles passifs : cas du conducteur ohmique 4- Dipôles actifs : 4-1- Générateurs idéaux	2 TD de 2h	6h

4-2- <i>Générateurs de Thévenin et de Norton</i> : Modélisation des générateurs réels ou électromoteurs 4-3- Equivalence Thévenin-Norton 5- Associations des Dipôles 5-1- Associations de conducteurs ohmiques 5-2- Associations de générateurs idéaux de tension 5-3- Associations de générateurs idéaux de courant 5-4- Associations mixtes de générateurs idéaux 6- Puissance reçue par un dipôle – Convention récepteur/générateur III- Réseaux électriques : 1- lois de Kirchhoff : loi des nœuds loi des mailles 2- Diviseur de tension 3- Diviseur de courant 4- Théorème de <i>Thévenin et de Norton</i> 5- Théorème de Millman.		
Chapitre 6 : Régimes transitoires du premier ordre I - Méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre II- Régime transitoire et régime permanent en électrocinétique : Comportement d'un condensateur 1- Présentation du dipôle condensateur 2- Réponse à un échelon de tension : régime transitoire 3- Propriétés particulières du condensateur 4- Définitions : régimes transitoire et permanent 5- Etablissement de l'équation différentielle et résolution : charge et décharge d'un condensateur 6- Notion de constante de temps III- Aspects énergétiques 1- Energie emmagasiné par un condensateur 2- Bilan énergétique lors de la charge et de la décharge d'un condensateur : stockage et déstockage d'énergie 3- Conclusion : analogie avec les transferts particuliers et thermiques	1 TD de 2h	2h
Partie 3 : Optique géométrique.		
Chapitre 1 : Lois de Descartes. Introduction : Rappels sur la nature de la lumière I- Propagation de la lumière dans un milieu matériel 1- Interactions avec le milieu 2- Vitesse de propagation dans un MHTI : indice optique du milieu 3- Propagation rectiligne dans un MHTI 4- Notion de rayon lumineux II- Les sources de lumières. 1- Source primaire ou secondaire 2- Sources ponctuelle ou étendue III- Les lois de Snell-Descartes. 1- Lois de la réflexion et de la réfraction 2- Notion de réflexion totale angles limites IV- Notion d'objet et d'image, Stigmatisme et aplanétisme. 1- Définitions. 2- Stigmatisme et aplanétisme 3- Approximation de Gauss	2 TD de 2h	6h

V- Systèmes à faces planes: 1- Miroir plan 2- Dioptré plan 3- Lames à faces parallèle 4- Prisme		
Chapitre 2 : Lentilles minces dans les conditions de l'approximation de Gauss. I- Présentation et conditions d'utilisation II- Propriétés des lentilles sphériques minces 1- Axe optique et centre optique 2- Foyers principaux 3- Distances focales – Vergence 4- Foyers secondaires – Plans focaux III- Constructions géométriques. 1- Tracé d'un rayon lumineux quelconque 2- Construction d'image : méthode – les trois rayons fondamentaux 3- Cas des lentilles convergentes 4- Cas des lentilles divergentes IV- Relation de conjugaison et formule du grandissement transversal de Descartes V- Association de lentilles minces. 1- Cas de deux lentilles minces accolées. 2- Cas de deux lentilles non accolées	1 TD de 2h	5h
Chapitre 3 : Montages et instruments d'optique. I- Un instrument d'optique particulier : l'œil 1- Description de l'œil 2- Le phénomène d'accommodation 3- Les défauts de l'œil II- Loupe. III- Microscope.	2 TD de 2h	4h
Partie 4: Thermodynamique:		
Chapitre 1: Introduction à la thermodynamique I- Définition de la thermodynamique. Les trois niveaux de description d'un système. II - Description d'un système thermodynamique 1- Définitions 2- Grandeurs du système et grandeurs de transfert ou d'échange 3- Types de systèmes 4. Paramètres d'état d'un système 4-1- Notion de paramètres d'état 4-2- Définition de la pression. 4-3- Définition de la température 4-4- Equation d'état d'un système III. Différents modèles de gaz 1- Modèle du gaz parfait 2- Mélange idéal de gaz parfaits 3- Limites du modèle du gaz parfait 4- Exemple d'une autre modélisation d'un gaz : modèle de Van der Waals		2h
Chapitre 2 : Eléments de statique des fluides	1TD	2h

I. Equation différentielle fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur. II. Application aux fluides incompressibles 1- Equation de la statique des fluides incompressibles 2- Applications : mesures de pression 3- Application en géologie : principe de l'isostasie III. Application aux fluides compressibles 1- Exemple du modèle de l'atmosphère isotherme 2- Pression d'un système macroscopique gazeux	2h	
Chapitre 3 : Equilibre et transformations thermodynamiques d'un système fermé. I- Notion d'équilibre thermodynamique 1- Définition de l'équilibre thermodynamique et conditions de cet équilibre 2- Equation d'état d'un système à l'équilibre thermodynamique. II- Transformations d'un système : 1- Etat hors équilibre : transformation. 2- Transformations réversibles et irréversibles 3- Représentation d'une transformation. 4- Exemples de transformations particulières.	2 TD de 2h	3h
Chapitre 4 : Premier principe de la thermodynamique système fermé. I- Energie d'un système thermodynamique. 1- Energie interne 2- Enthalpie 3- Transfert d'énergie mécanique : travail mécanique 4- Transfert d'énergie thermique-Coefficients calorimétriques 4-1 - Transfert d'énergie thermique 4-2 - Coefficients calorimétriques 4-2-1 - Capacité calorifique 4-2-2 - Coefficients de dilatation et de compressibilité II- Expression générale du premier principe de la Thermodynamique 1- Enoncé du premier principe de la thermodynamique 2- Applications du premier principe 2-1- Cas d'un gaz parfait : Coefficients calorimétriques 2-2- Etude de quelques transformations	2 TD de 2h	3h
Chapitre 5 : Second principe de la thermodynamique pour un système fermé. I – Introduction : insuffisance du premier principe de la thermodynamique. II – Enoncé du second principe de la thermodynamique. III – Applications du second principe de la thermodynamique	1 TD de 2h	2h
Chapitre 6 : Machines thermiques. I - Source de chaleur 1- Définitions 2 - Inégalité de Clausius II – Cycles monothermes III- Cycles dithermes 1 - Moteur thermique 2 - Machine frigorifique et pompe à chaleur IV- Application : Cycle de Carnot.	2TD de 2h	3h

Partie 5 : Mécanique du point :

Chapitre 1: Cinématique du point matériel. I- Définitions Fondamentales. 1- Rappels de calcul vectoriel. Produit scalaire, produit vectoriel, différentiel d'un vecteur dépendant d'une ou plusieurs variables et opérateur gradient 2- Repères et référentiels. - Coordonnées cartésiennes - Coordonnées cylindriques - Coordonnées sphériques II- Grandeurs de la cinématique 1- Equation horaire 2- Trajectoire 3- Vitesse. 4- Accélération 5- L'abscisse curviligne 6- Vitesse et accélération dans le système de coordonnées cylindrique 7- Trièdre de Serret-Frenet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$: III- Les différents types de mouvement. 1- Nature du mouvement. 2- Mouvement rectiligne : - mouvement rectiligne uniforme - mouvement rectiligne uniformément varié - mouvement sinusoïdal 3- Mouvement circulaire : - Vitesse et accélération angulaire : - Mouvements circulaire uniforme: - Mouvements circulaire uniformement varié: IV- Composition des mouvements changement des référentiels : 1- Introduction : référentiels absolu et relatif 2- Loi de composition des vitesses. 3- Loi de composition des accélérations. 4- Etude du mouvement d'entraînement : - Entraînement par translation. - Entraînement par translation circulaire	2 TD de 2h	6h
Chapitre 2 : Dynamique du point matériel : Introduction I- Les Lois de Newton : 1- Première loi de Newton ou principe d'inertie. 2- Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique. 2-1- Définitions 2-2- Référentiel Galiléen. 2-3- Enoncé de la deuxième loi de Newton (R.F.D) : 3- troisième loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction II- Equation générale du mouvement. III- Nature des forces. 1- Forces à distance - Les forces de gravitations - Les forces électriques - Les forces magnétiques	1 TD de 2h	3h

2-Forces de contact - Les forces de frottements. - Les forces de Réactions.		
Chapitre 3 : Travail et Energie I- Travail et puissance d'une force 1- Travail 2- Puissance II- Forces conservatives et énergie potentielle. 1- Energie potentielle 2-Force conservative et énergie potentielle associée III- Théorème de l'énergie cinétique 1- Energie cinétique d'un point matériel 2- Théorème de l'énergie cinétique IV- Energie mécanique 1-Définition 2-Théorème de l'énergie mécanique V- Equilibre d'un point matériel dans un champ de force 1- Condition d'équilibre – problème à un degré de liberté 2- Stabilité de l'équilibre VI. Applications : 1- Oscillateur harmonique. 2- Forces gravitationnelles.	2 TD de 2h	6h

Formation Expérimentale :

Partie II

Activité Expérimentale n°1: Etude d'un signal – mesure de temps et de fréquence et battement.

Activité Expérimentale n°2: Etudes des circuits. Vérification des théorèmes généraux de l'électrocinétique.

Activité Expérimentale n°3: Circuits RC.

Activité Expérimentale n°4 : Etude d'un dipôle thermistance et photorésistance.

Partie III.

Activité Expérimentale n°5: Etude Du prisme.

Activité Expérimentale n°6: Focométrie.

Activité Expérimentale n°7: Œil, loupe et Microscope.

Partie IV

Activité Expérimentale n°8: Calorimétrie

Activité Expérimentale n°9: Transformations d'un gaz parfait.

Partie V

Activité Expérimentale n°10:

Répartition horaire et programme de Physique pour la 2ème Année préparatoire section Biologie-Géologie

Nombre de semaines d'enseignements 26 semaines.

Thème	Nbre d'heures pour la formation disciplinaire	Nbre d'heures pour la formation expérimentale	Nbre heures TD
Thermodynamique	11h	3h	10h
Phénomènes de Transport	14h	6h	6h
Signal et Rayonnement	13h	12h	10h
Mécanique	8h	-	6h
Mécanique des fluides	14h	3h	12h
Total	60h	24h	44h

Nombre d'heures d'enseignements de cours intégrés : 4h/semaine

Recommandations : Les 4 heures d'enseignements sont assurées par un même enseignant et il est souhaitable que les travaux pratiques (1 heure/semaine) soit aussi assuré par l'enseignant du cours.

Formation disciplinaire	Nombre de TD	Nombre heures Cours
Partie 1: Thermodynamique:		
Chapitre 1: Fonctions Thermodynamique, Coefficients Calorimétriques I- Introduction : Rappel des notions de la première année (premier et second principe). II – Fonctions thermodynamiques 1- Fonction énergie libre 2- La fonction enthalpie libre ou fonction de Gibbs 3- Les relations de Helmholtz III- Les coefficients calorimétriques. 1- Définitions. 2- Détermination des coefficients calorimétriques pour un corps homogène 2-1 Relations de Clapeyron 2-2- Relation de Mayer 2-3- Autres relations	1 TD de 2h	3h
Chapitre 2: Les Potentiels thermodynamiques Introduction I – Potentiels thermodynamiques 1- Evolution d'un système mécanique conservatif 2- Evolution thermodynamique d'un système isolé Exemple : Détente de Joule-Guy-Lussac d'un gaz parfait	1 TD de 2h	3h

3- Evolution d'un système à volume et entropie constante 4- Evolution d'un système à pression et entropie constante 5- Evolution d'un système à température et volume constant 6- Evolution d'un système à température et pression constante II- Transformation monotherme 1- Travail maximum récupérable 2- Potentiel thermodynamique F^* III- Transformations monotherme et monobare 1- Travail maximum récupérable 2- Potentiel thermodynamique G^* Approche documentaire : A partir de documents sur la pression osmotique, discuté d'applications, au laboratoire, dans l'industrie ou dans le vivant, de l'influence de la pression sur le potentiel chimique.	2h	
Chapitre 3: Changements d'état d'un corps pur. I- Phénomènes de changement de phases 1- Les différents changements d'états 2- Aspects énergétiques II. Diagramme de phase température – pression 1- Notion de variance 2- Présentation du diagramme de phase pression – température 3- Equilibre solide – liquide : courbe de fusion 4- Equilibre liquide – gaz : courbe de vaporisation – existence d'un point critique 5- Equilibre solide – gaz : courbe de sublimation – existence d'un point triple 6- Lecture du diagramme III. Intervention du paramètre volume : diagramme de Clapeyron volume – pression. 1- Isotherme d'Andrews dans le cas de l'équilibre liquide-vapeur 2- Courbes de rosée et d'ébullition 3- Titre en vapeur massique 4- Théorème des moments : quantité de chaque phase IV- Condition d'équilibre d'un corps pur sous deux phases 1- Enthalpie de changement d'état 2- Entropie de changement d'état V- Calorimétrie	2 TD de 2h	5h
Partie 2: Phénomènes de Transport.		
Chapitre 1: Conduction électrique. I- Rappel sur Flux d'une grandeur extensive. 1- Vecteur densité de courant 2- Flux. II- Conduction électrique et loi d'Ohm locale III. Résistance électrique		2h
Chapitre 2 : Conduction thermique. I- Différents modes de transfert thermique Résistance thermique. II- Loi de Fourier. III- Bilan de transfert de chaleur IV- Exemples d'application 1- Mure plan en régime stationnaire 2- Conduite cylindrique et transport radiale	1 TD de 2h	4h

<u>Chapitre 3 : Diffusion de matière</u> <i>I- Transferts de masse par convection ou diffusion.</i> <i>II- Loi de Fick.</i> <i>III- Bilan de transport par analogie</i>	1 TD de 2h	2h
<u>Chapitre 4 : Transport de masse et d'énergie par convection-Système ouvert</u> <i>I- Premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert.</i> 1- Bilan de masse 2- Bilan d'énergie 3-Travail utile et variation d'enthalpie. <i>II- Applications à quelques machines élémentaires.</i> 1- Compresseur et ou détendeurs 2- échangeurs de chaleur 3- Régime permanent dans une conduite (Bernoulli, détente isenthalpique de joule Thomson) <i>III- Machine Thermique</i>	1 TD de 2h	6h
Partie 3 : Signal et rayonnement.		
<u>Chapitre I : Dipôles Electriques.</u> <i>I- Conventions de signe</i> <i>II- Caractéristiques d'un dipôle</i> <i>III- Classification des dipôles</i> 1- Dipôles linéaires 2- Dipôles non linéaires <i>IV- Dipôles dans un circuit</i> 1- Droite de charge 2- Point de fonctionnement 3- Résistances d'un dipôle <i>V- Association des dipôles</i> 1- Association en série 2- Association en parallèle	1 TD de 2h	3h
<u>Chapitre II : Régimes Variables au cours du temps.</u> <i>I- Oscillateurs libres amortis.</i> <i>II- Régime sinusoïdal forcé.</i> <i>III- Les filtre.</i>	2 TD de 2h	4h
<u>Chapitre III : Application à la production et l'analyse des signaux.</u> <i>I- Onde progressive sinusoïdale.</i> 1- dans le cas d'une propagation unidimensionnelle linéaire et non dispersive. 1-1- Célérité, 1-2- périodicité spatiale et temporelle. 2- Analyse spectrale d'un rayonnement.. <i>II- Ondes Sonores.</i> 1- Suppression acoustique. 2- Intensité acoustique 3- Effet Doppler 4- Dioptré acoustique ; réflexion et transmission d'une onde acoustique en incidence normale. 5- Imagerie par échographie ultrasonore.	2 TD de 2h	6h

Partie 4 : Mécanique.		
Chapitre 1 : Statique des solides. I- Le moment d'une force. 1- Le moment d'une force par rapport à un point. 2- Le moment d'une force par rapport à un axe. II- Conditions d'équilibre d'un solide III- Application	1 TD de 2h	4h
Chapitre 2 : Forces Conservative I- Forces Gravitationnelle II- Energies III- Trajectoires elliptique IV- Mouvement des astres V- Approche Documentaire	1 TD de 2h	2h
Chapitre 3 : Oscillateurs I- Oscillateurs libres II-Oscillateurs forcées	1 TD de 2h	2h
Partie 5 : Mécanique des fluides		
Chapitre 1 : Statique des fluides I- Particule de fluide, échelle mésoscopique II- Densité volumique des forces de pression III- Équation de la statique des fluides IV- Forces pressantes V- Poussée d'Archimède	1 TD de 2h	2h
Chapitre 2 : Tension superficielle, Capillarité I- Notion de tension superficielle II- Loi de Laplace- Application-observations: bulles; force de rappel; extrémité de tube III- Angle de raccordement (trois phases en contact), ménisques IV- Ascension et dépression capillaire (Loi de Jurin) V- Applications sur les phénomènes des tensions superficielles 1- Applications-observations: aiguille; gerris; basilic; flottation; lotus; surfactant pulmonaire 2- Cohésion d'un liquide (montée de la sève dans les grands arbres)	1 TD de 2h	2h
Chapitre 3 : Dynamique des fluides I- Eléments de la cinématique des fluides Trajectoire, champ de vitesse, ligne de courant. II- Bilan Energétique. 1- Bilan d'énergie mécanique dans le cas d'un écoulement monodimensionnel et permanent d'un fluide incompressible. 2- Le travail utile massique dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait. III- Bilan de masse.		2h
Chapitre 4 : Dynamique des fluides Parfait I- Equation de Bernoulli II- Applications 1-Mesure des vitesses : Tube de Pitot 2- Effet Venturi : Trompe à eau sténose	1 TD de 2h	2h
Chapitre 5: Dynamique des fluides visqueux I- Viscosité: phénomène macroscopique i.e. résistance au	2 TD de 2h	4h

<i>mouvement, chute, sédimentation, Stokes; valeurs de viscosité; faibles / grandes vitesses</i> II- Viscosité: phénomène microscopique, Force de viscosité d'un fluide Newtonien III- Loi de Poiseuille, profil de vitesse IV- Débit, vitesse moyenne V- Applications-observations: arrosage; transfusion sanguine,... VI- Notion de régime turbulent et nombre de Reynolds. VII- Écoulement dans un milieu poreux. Porosité, Pression effective, Perméabilité, Loi de Darcy. Approche documentaire : Illustrer un processus de sédimentation.		
--	--	--

Formation Expérimentale :

Partie I

Activité Expérimentale n°1: Les isothermes d'Andreu.

Partie II

Activité Expérimentale n°2: Etude numérique d'un problème de diffusion.

Activité Expérimentale n°3: Etude optique de la diffusion d'un corps dissout.

Partie III

Activité Expérimentale n°4: Etude électrique d'un dipôle non linéaire (Diode).

Activité Expérimentale n°5: Etude des filtres.

Partie V

Activité Expérimentale n°6: Tension superficielle.

Activité Expérimentale n°7: Vidange d'un réservoir.

Activité Expérimentale n°8: Chute d'une bille dans un milieu visqueux.

12 h de travaux pratiques (des comptes rendus et un examen TP)

c) Réactions dues à la présence du groupement aminé et intérêts des réactions.	-Réaction de désamination par l'acide nitreux, réaction de transamination, action des aldéhydes (action du formol : Formol-titration de Sorénson), réaction de Sanger et réaction d'Edman (il faut montrer l'importance de ces deux dernières réactions dans l'identification et le dosage des acides aminés ainsi que dans la détermination de l'acide aminé N-terminale d'une chaîne peptidique).
d) Réactions nécessitant la présence simultanée d'un groupement α -carboxyle et d'un groupement α -aminé	-Réaction avec la ninhydrine (il faut montrer l'importance de cette réaction dans l'identification et le dosage des acides aminés, toutefois cette réaction n'est pas à retenir par les étudiants), formation de la liaison peptidique.
5. Séparation des acides aminés	
a) Chromatographie	-Chromatographie de partage, chromatographie sur couche mince, chromatographie d'exclusion chromatographie échangeuse d'ions (principe de chaque méthode et protocole expérimental).
b) Electrophorèse	
B. Les peptides et les protéines	
1. Définition	- La liaison peptidique : nature chimique et stabilisation par résonance (sans trop détailler les mécanismes chimiques)
2. Convention d'écriture et nomenclature	-Structure d'une chaîne peptidique : oligopeptide et polypeptide.
3. Représentation schématique.	
4. Propriétés physico-chimiques	-Aspect, ionisation, caractère amphotère, pouvoir rotatoire, absorption dans l'UV. -Exemple d'une réaction : Réaction de Biuret.
5. Etude de quelques peptides biologiquement actifs	-Exemples : ocytocine, vasopressine, insuline et glutathion.
6. Principaux types de protéines	-On cite les différents types de protéines et leurs rôles biologiques (enzymes, protéines de réserve, de transport).
7. Conformation ou organisation structurale des protéines	-Forces qui stabilisent la structure tridimensionnelle des protéines. - Décrire brièvement les structures primaire, secondaire (hélice α , feuillet β , pelote et coude), tertiaire et quaternaire (exemple hémoglobine). - Dénaturation des protéines (protéine native, protéine dénaturée)
8. Etude de la structure primaire des peptides et des	- Montrer que les réactions vues précédemment dans la partie « propriétés chimiques des acides aminés » nous permet de déterminer la séquence primaire d'un peptide

protéines	ou d'une protéine.
a) Détermination de la composition globale en acides aminés	-Hydrolyse des liaisons peptidiques par voie chimique et enzymatique.
b) Détermination de la séquence en acides aminés	-Méthodes permettant de déterminer les acides aminés N-terminaux (Sanger, Edmanet aminopeptidase) -Méthodes permettant de déterminer les acides aminés C-terminaux (hydrazinolyse et carboxypeptidase). -Hydrolyse des séquences peptidiques intra-chaîne, (BrCN, trypsine, chymotrypsine, pepsine).
5. Séparation des protéines	
a) Séparation selon la charge	-Electrophorèse dans les conditions natives, chromatographie échangeuses d'ions
b) Séparation selon la taille (poids moléculaire)	-Chromatographie d'exclusion moléculaire (gel filtration ; tamisage moléculaire), électrophorèse dans les conditions natives (SDS-PAGE). On montre que ces deux méthodes permettent de déterminer le poids moléculaire inconnu d'une protéine.
c) Séparation selon la capacité à se lier à d'autres biomolécules	-Chromatographie d'affinité (antigène-anticorps et enzyme-substrat).
II. LES GLUCIDES (10H + 4H TD)	
Définition générale : définition des glucides (glucides non hydrolysables et glucides hydrolysables) et rôles biologiques (source d'énergie, glucide de réserve et de structure)	
A. Monosaccharides ou oses ou sucres simples	
1. Structure linéaire	-Formule générale des oses (exception : désoxyribose) Classification des oses selon le nombre d'atomes de carbone et la fonction réductrice (cétone ou aldéhyde) On cite l'exemple d'aldose : glucose et cétose : fructose.
a) Isomérisation	-Présence de carbones asymétriques (à l'exception de la dihydroxyacétone), plusieurs stéréoisomères et pouvoir rotatoire. -Séries D et L (le glycéraldéhyde est la base de référence, réaction de synthèse de Kiliani-Fisher). -La filiation des aldoses (de C3 jusqu'à C6) -La filiation des cétooses (de C3 jusqu'à C6). -Les formules des oses à retenir par les étudiants (dihydroxyacétone, glycéraldéhyde, glucose, galactose, mannose, fructose, ribose, désoxyribose).
b) Épipimérisation	-Définition de l'épipimérisation (exemple glucose, mannose en C2, glucose et galactose en C4 ; fructose et psicose en C3).

4. Propriétés physiques des oses	-Aspect, point de fusion, propriétés optiques (loi de Biot/Beer-Lambert).
5. Dérivés d'oses biologiques	- Dérivés amines d'oses biologiques : la glucosamine, la galactosamine, la N-acétylglucosamine ou la N-acétylgalactosamine - Dérivés acides d'oses biologiques : les acides aldoniques, les acides uroniques, l'acide sialique = acide N-acétylneuraminique (NANA) et l'acide ascorbique = vitamine C
B. Les osides	
1. Liaison glycosidique	-Définition de la liaison osidique
2. Les diholosides	
a) Les diholosides réducteurs	-Définition, exemples : maltose, cellobiose et lactose. (formules et noms).
b) Les diholosides non réducteurs	-Définition, exemples : saccharose et tréhalose (formules et noms).
3. Les triholosides	-Exemple : raffinose (formule et nom). - Introduire les osidases (spécificité de l'action de ces enzymes : exemples la bêta-galactosidase etc...).
4. les polysaccharides	-Origines, rôles et structures de ces polysaccharides.
a) L'amidon	
b) Le glycogène	
c) La cellulose	
III. LES LIPIDES (6HC + 2HTD)	
Définition générale : Le terme de lipide désigne une large classe de composés insolubles dans l'eau et solubles dans les solvants organiques tels que l'éther, le benzène, le chloroforme. La plupart des lipides sont amphiphiles. Les principales exceptions sont le cholestérol, les stéroïdes et les vitamines liposolubles. Nous pouvons classer les lipides sommairement en lipides simples (composés de C, H et O) et lipides complexes comportant en plus des atomes de soufre, de phosphore, d'azote (C, H, O, S, P, N)	
A- Les lipides simples	
1. Les glycérides ou acyl-glycérols	
a) Le Glycérol	
b) Les glycérides	
c) Les acides gras	les mono-acyl-glycérols, les di-acyl-glycérols, les tri-acyl-glycérol (on cite quelques exemples).

c.1. Définition	-Classification en acides gras saturés et insaturés. -Formule générale des acides gras saturés et nomenclature.
c.2. Classification	-Les acides gras saturés à nombre impaire d'atomes de carbone (exemples : acide propionique en C3, et acide valérique en C5).
c.2.1) Les acides gras saturés	-Les acides gras saturés à nombre paire d'atomes de carbone : les acides gras du C4 jusqu'à C24.
c.2.2) Les acides gras insaturés	-Les différents types d'acide gras insaturés : *Les acides gras mono-insaturés. *Les acides gras poly-insaturés indispensables. -Nomenclature biochimique et signification de la lettre ω . (Les étudiants doivent retenir les formules des acides gras insaturés suivants : Acide palmitoléique, acide oléique, acide linoléique, acide linolénique et acide arachidonique.
c.3. Propriétés physiques des acides gras	
c.3.1) Solubilité	-Degré d'hydrophobicité qui dépend de la longueur de la chaîne hydrocarbonée et le nombre d'insaturation.
c.3.2) Point de fusion	-Point de fusion qui dépend la longueur de la chaîne hydrocarbonée et le nombre d'insaturation.
c.4. Propriétés chimiques	
c.4.1) Propriétés dues à la présence de la fonction acide	-Formation des sels (saponification), formation d'ester (estérification avec le méthanol).
c.4.2) Propriétés dues à la présence de la double liaison	-Réaction d'addition (addition des halogènes, hydrogénation). -Réaction d'oxydation (oxydation ménagée, oxydation poussée par le permanganate de potassium).
c.5. Séparation et analyse des acides gras	-Chromatographie sur Couche Mince (CCM), -Chromatographie en phase gazeuse (principe, schéma).
c.6. Propriétés chimiques des glycérolipides:	
c.6.1) hydrolyse	-Hydrolyses chimique et enzymatique (les lipases).
c.6.2) saponification	-Formation des sels d'acides gras : savons.
c.6.3) Détermination des indices caractéristiques des Triglycérides	-Indice e saponification, indice d'ester et d'acidité, indice d'iode. Détermination de la masse molaire des glycérolipides.

B. Les lipides complexes <u>Définition :</u> deux grandes familles des lipides complexes qui sont les phospholipides et les sphingolipides. Les lipides complexes sont amphiphiles. 1. Les glycérophosphatides ou phosphoglycérolipides ou phosphoglycérides. a) Les acides phosphatidiques b) Les phosphoaminolipides c) Les inositides ou inositophosphatides ou phosphatidylinositol 2. Glycosyldiglycérides 3. Les sphingolipides a) Les céramides b) Les phosphosphingolipides c) Les glycosphingolipides IV. ENZYMOLOGIE (12HC + 4HTD) Définition générale : les enzymes sont des biocatalyseurs de nature protéique agissant à des concentrations salines, des pH et des températures optimales, et qui sont élaborées par les organismes sous l'impulsion de divers effecteurs de la synthèse protéique. A. Enzymes et catalyse enzymatique 1. Catalyse a) La notion d'énergie d'activation b) Les principales propriétés d'un catalyseur 2. Structure des enzymes 3. Spécificité de l'action enzymatique a) Spécificité liée à la réaction b) Spécificité liée au substrat	-On donne les structures et les noms de ces lipides. -On donne l'origine de ces lipides et quelques propriétés physiques : * Lipides amphiphiles (ils possèdent une partie hydrophile et partie hydrophobe). -On cite les différents types des phospholipases avec les sites de coupure (A1, A2, B, C, D). -On donne les structures et les noms de ces lipides. -On donne l'origine de ces lipides et quelques propriétés physiques : * Lipides amphiphiles (ils possèdent une partie hydrophile et une partie hydrophobe). -L'enzyme accélère la réaction chimique en diminuant l'énergie d'activation -diminution de l'énergie d'activation, action à faible dose, spécificité... -Structure tridimensionnelle, site actif, holoenzyme (apoenzyme et cofacteur), isoenzyme. -L'enzyme catalyse seulement une seule réaction telle que estérification, oxydation... -Spécificité liée à la nature de la liaison, spécificité de groupe, spécificité absolue pour un seul substrat et spécificité Stéréochimique.
--	---

B. Classification des enzymes	-On Cite les six classes d'enzymes (on prend un exemple de réaction pour chaque classe). *Nomenclature EC (Enzyme Commission number).
C. La cinétique enzymatique homogène	-Vitesse et ordre de réaction. Notion de la vitesse initiale d'une réaction enzymatique du premier ordre.
1. Mise en évidence du complexe ES par dialyse à l'équilibre et cinétique	-Description de l'expérience de dialyse à l'équilibre et établissement de l'équation de Scatchard. -Détermination de la constante de dissociation du complexe ES et le nombre de récepteurs stéréospécifiques portés par l'enzyme.
2. Cinétique de la réaction enzymatique	-Effet de la concentration en enzyme sur la vitesse initiale de la réaction enzymatique -Une relation linéaire directe entre la vitesse de la réaction et la concentration de l'enzyme.- -Mécanisme de Michaelis-Menten. -Notion de la vitesse maximale initiale. -Notion de K_M
3. La cinétique Michaélienne et les différentes représentations graphiques	
a) Equation de Michaelis-Menten	-Etablissement de l'équation de Michaelis-Menten
b) Représentations graphiques	-Représentations de : Michaelis-Menten, de Lineweaver-Burk (représentation des doubles inverses), d'Eadie-Hofstee, de Hans-woolf et de Robert Eisenthal- Athel Cornish-Bowden.
c) Effet de la concentration de l'enzyme	
d) Définition de l'activité enzymatique	-Les différentes expressions de l'activité enzymatique : *l'activité enzymatique totale (exprimée en $\mu\text{mol} \cdot \text{min}^{-1}$), *l'unité internationale UI (exprimée en $\mu\text{mol} \cdot \text{min}^{-1}$ et en katal), *l'activité spécifique AS (exprimée en $\mu\text{mol} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{mg}^{-1}$ de protéines totales), on montre que ce paramètre augmente au fur et à mesure de la purification de la protéine enzymatique en prenant un exemple expérimental de purification d'un extrait enzymatique, à travers cet exemple, on introduit la définition du rendement et facteur d'une étape de purification. *l'activité moléculaire spécifique ou « turnover number » AMS ou Kcat exprimée en s^{-1} .
4. Significations du K_M , V_{max} et Kcat.	- V_{max} :vitesse de réaction à saturation en substrat $V_{\text{max}} = K_{\text{cat}} [E_T]$, $[E_T]$: concentration totale en enzyme. Kcat(AMS) est la constante de vitesse de la réaction de catalyse, c'est un paramètre intrinsèque de l'enzyme. - K_M : constante de Michaelis : correspond à la concentration de substrat qui permet d'atteindre la moitié de la vitesse maximale. - K_M représente la constante de dissociation apparente du

	complexe Enzyme – substrat, K_M donne une indication approximative sur l'affinité de l'enzyme pour le substrat, plus K_M est élevé, plus l'affinité de l'enzyme pour le substrat est faible, K_M est un paramètre intrinsèque de l'enzyme.
5. Facteurs qui influencent la réaction enzymatique	
a) Effet du pH	-On montre l'effet du pH sur l'ionisation du substrat et la protéine enzymatique. -On présente la courbe théorique $v = f(\text{pH})$.
b) Effet de la température	-On montre l'effet de la température sur l'activation de la réaction et la dénaturation de la protéine enzymatique. -On présente la courbe théorique $v = f(\text{température})$.
7. Les effecteurs de l'activité enzymatique	
a) Inhibition compétitive	Pour les différents types d'inhibiteurs : * on décrit le mode d'action, * on définit la constante d'inhibition K_I, * on rétablit l'équation de Michaelis-Menten, * On donne l'expression de V_{max} apparente et K_M apparente en fonction de K_I et la concentration de l'inhibiteur $[I]$. * On trace les représentations graphiques de : Michaelis-Menten, Lineweaver-Burk, Eadie-Hofstee et de Hans-woolf en absence et en présence de l'inhibiteur.
b) Inhibition non compétitive absolue	
c) Inhibition incompétitive	

Travaux Pratiques De Biologie Cellulaire

12 h de travaux pratiques (une note de TP)

TP1 :

* pHmétrie (Titration d'un acide aminé),

* Chromatographie en couche mince d'un mélange d'acides aminés et/ou Electrophorèse d'un mélange protéique tel que le blanc d'œuf.

* Dosage protéique par la méthode de Bradford ou Biuret

TP2 :

Propriétés et réactions caractéristiques des glucides

- réactions des produits de déshydratation des oses avec certaines amines aromatiques et certains phénols : réaction de Molish, réaction de Seliwanof (Resorcinol), réaction de Bial (Orcinol) et réaction de Dische (Diphénylamine).

TP3 :

Détermination des indices caractéristiques d'acide gras (Indice d'acide, de saponification, d'ester et d'iode d'une huile vierge et d'une huile partiellement dégradée (relation entre les indices et le structure).

TP4 :

Enzymologie : activité enzymatique en fonction du temps, en fonction de la concentration du substrat, en fonction de la concentration en enzyme avec la détermination de K_m et V_{max} . Un Exemple d'enzyme ça peut être l'invertase ou la β -galactosidase

Matériel nécessaire pour les TP de Biochimie

La liste du matériel suivant est nécessaire pour la réalisation du TP de Biochimie

- Spectrophotomètre (2 par salle de TP)
- pHmètre (1 par binôme)
- Appareil d'électrophorèse avec générateur (2 cuves et 1 générateur pour 4 étudiants)
- Verrerie pour les TP de Glucide
- Verrerie et Chauffe ballon pour les TP des lipides
- Réactifs chimiques et enzyme (Béta-galactosidase ou invertase)

Programme de Biologie Végétale du Cycle Préparatoire

Biologie - Géologie (BG1)

30 heures de cours (un devoir, un examen et un test écrits)

15 h de travaux pratiques (des comptes rendus et un examen TP)

OBJECTIFS:

La biologie végétale est une science nécessaire pour la compréhension des diverses disciplines agroalimentaires, pharmaceutiques et écologiques. Ce programme donne aux étudiants de la première année préparatoire une vue globale des plantes à fleurs partant d'une description morphologique à l'échelle de la plante entière, arrivant à l'étude de la structure anatomique à l'échelle des organes et des tissus végétaux.

L'étude des Angiospermes montre sans doute l'importance de ces plantes ainsi que leur degré d'évolution. Un intérêt particulier est attribué aux adaptations de ces plantes aux contraintes de leur environnement. Ainsi, l'étudiant aura une idée sur la diversité des plantes à fleurs.

Ce programme donne également un aperçu détaillé sur la reproduction sexuée des plantes à fleurs (modalités et résultats) en soulignant la diversité des graines et des fruits.

Le cours sera illustré par cinq séances de travaux pratiques qui aideront l'étudiant à se familiariser avec le matériel végétal. Les manipulations doivent permettre à l'étudiant d'acquérir la capacité de :

- Connaître l'appareil végétatif et ses modifications ;
- Réaliser des coupes semi-fines ;
- Pratiquer la double coloration au carmino-vert ;
- Connaître les différents tissus végétaux ;
- Connaître l'anatomie des organes végétatifs ;
- Connaître l'organisation d'une fleur ;
- Connaître les différents types de graines et de fruits.

La logique de ce programme a pour but d'éclaircir et de comprendre la notion de la plante à fleurs (morphologie, anatomie et reproduction). Ceci ne pourra que faciliter l'acquisition de la botanique enseignée en deuxième année. L'ensemble des chapitres traités, ainsi qu'une sortie sur le terrain, prépareront l'étudiant à l'étude de la systématique des Angiospermes.

INTRODUCTION: (1 h)

Positionner les Angiospermes dans le règne des Viridiplantae (Lignée vertes) : notion d'Embryophytes et de plantes terrestres, de Trachéophytes et de Spermaphytes divisés en Gymnospermes et Angiospermes.

**Première partie : MORPHOLOGIE DES PHANEROGAMES
(11h)****I. L'appareil végétatif: (1h)****La diversité morphologique de l'appareil végétatif et son adaptation à l'environnement:**

- Identifier les différentes parties végétales d'une plante (racines, tiges, feuilles, bourgeons, fleurs et fruits) ;
- Localiser le bourgeon terminal, les bourgeons axillaires et adventifs ;
- Situer les nœuds et les entre-nœuds (notion de phytomère).

A. La racine: (2h)**A1- Morphologie de la racine :**

- Identifier les différentes parties de la racine et leurs rôles.
- Racine principale et ses ramifications.
- Racines adventives (localisation et rôle).
- Principaux types morphologiques du système racinaire:
 - Système racinaire pivotant ;
 - Système racinaire fasciculé.

B. La tige: (3h)

A2- Adaptations fonctionnelles de la racine:

- Alimentation (racines aériennes, racines lianes, racines pneumatophores, racines suçoirs) ;
- Fixation (racines crampons, racines échasses, racines contreforts, racines ventouses) ;
- Stockage de réserves (racines tubérisées ou tuberculeuses) ;
- Protection (épines).

B1- Morphologie de la tige :

- **Organisation des bourgeons permettant la croissance et la ramification** (sans détails pour le méristème) :

- Bourgeon terminal ;
- Bourgeon axillaire ;
- Bourgeon adventifs.

- **Différents types de tige Selon l'orientation de la croissance:**

- Tiges dressées ;
- Tiges rampantes (stolon) ;
- Tiges grimpantes (crampon, vrille, tiges volubile).

- **Modes de ramification:**

- Ramification monopodiale.
- Ramification sympodiale ;

- **Différents ports de plantes :**

- Port herbacé ;
- Port buissonnant (notion de basitonie et épitonie) ;
- Port arborescent (notion d'acrotonie et d'hypotonie).

C. La feuille: (2h)

- Cas particuliers de tiges :

- Chaume de Poacées (Graminées) ;
- Stipe des Arecacées (Palmées).

B2- Adaptations fonctionnelles de la tige :

- Nutrition carbonée (**cladode** chez *Ruscus hypophyllum* et **phylloclade** chez *Opuntia ficus indica*) ;
- Stockage de réserves nutritionnelles (tubercule, bulbe solide, rhizome) ;
- Stockage de l'eau (chez les malacophytes) ;
- Protection contre les herbivores (épines) ;
- Fixation (vrilles).

C1- Morphologie de la feuille:

- Différentes parties de la feuille (limbe, pétiole, gaine, stipules).
- Nervation (parallèle et symétrique).
- **Différents types de feuilles:**
 - Feuilles simples (entières, dentées, lobées);
 - Feuilles composées (pennées, palmées, pédalées).
- **Phyllotaxie:**
 - Définition ;
 - Disposition alterne ;
 - Disposition opposée et opposée décussée ;
 - Disposition verticillée.

II. L'appareil reproducteur: (3h)	- Persistence et chute de la feuille: • Plantes à feuillage caduc (étape de la chute d'une feuille) ; • Plantes à feuillage persistant. -Polymorphisme foliaire ou hétérophylle: • Définition ; • Exemples d'hétérophylle liée à l'âge : <i>Phaseolus vulgaris</i>/ Fabaceae (Papilionacées) ; • Exemple d'hétérophylle liée au milieu : <i>Ranunculus aquatilis</i> (Renonculacées). <u>C2-Adaptations fonctionnelles de la feuille:</u> -Nutrition (phyllode, feuilles-pièges) ; -Stockage de réserves nutritionnelles (bulbe feuillé) ; -Stockage d'eau (feuilles charnues chez les malacophytes) ; -Protection contre les herbivores (épines) ; -Protection contre la sécheresse (écailles) ; -Fixation (vrilles). <u>1. Analyse florale :</u> -Notion de bractée. -Définition de la fleur en tant qu'axe reproducteur. -Différentes parties de la fleur : (La reproduction sera traitée dans la troisième partie). • Calice ; • Corolle ; • Androcée (morphologie d'une étamine) ; • Pistil (morphologie d'un carpelle).
---	--

2. Diversité morphologique de la fleur :

-Nombre et disposition des pièces florales :

- Règle de l'isométrie ;
- Règle de l'alternance ;
- Formule florale (fleur trimère chez les Monocotylédones et fleur pentamère, tétramère ou polymère chez les Dicotylédones (Eudicots) ;
- Notion de fleurs dialypétales, gamopétales ou apétales.
- Notion:
 - De calice dialysépale ou gamosépales ;
 - D'étamines introrses ou extrorses ;
 - D'androcée dialystémone gamostémone ;
 - De gynécée syncarpe ou apocarpe ;
 - D'ovaire super ou infère, et de fleur épigyne, hypogyne ou périgyne.

- Symétrie de la fleur :

- Fleur actinomorphe ;
- Fleur zygomorphe.

-Notion de :

- la fleur hermaphrodite ou unisexuée ;
- la plante monoïque et dioïque.

-Diagramme et formule florale.

3. Les Inflorescences :

-Inflorescences racémeuses : (grappe, épi, corymbe, ombelle et capitule).

- Inflorescences cymeuses : (cyme unipare scorpioïde ou hélicoïde, bipare et multipare).

-Inflorescences mixtes.

CONCLUSION :

- Chaque espèce végétale est caractérisée par une taille, une forme et une organisation particulière. Cela détermine sa morphologie.
- Le phénotype morphologique d'une plante dépend en partie de son environnement.

Deuxième partie: HISTOLOGIE ET ANATOMIE (10h)**Introduction: (30 min)**

- Rappeler les particularités de la cellule végétale déjà mentionnées dans le cours de Biologie Cellulaire.
- Préciser les traits distinctifs de la cellule végétale comparativement à la cellule animale.

I- La paroi cellulaire: (2h)**1. Structure de la paroi:**

- Différents niveaux de la paroi pectocellulosique.
- Nature chimique de chaque niveau: protéines, composés pectiques, structure fibrillaire de la cellulose.
- Caractéristiques mécaniques de chaque niveau : perméabilité sélective de la Paroi primaire. Imperméabilité et rigidité de la paroi secondaire.

2. Relation entre la composition chimique et les propriétés mécaniques de la paroi:

- Modification de la paroi végétale au cours de la croissance: Rigidification et imperméabilité (lignification, subérification, cutinisation et gélification).

3. Les échanges cellulaires:

- Différents types de ponctuations (simple, bordée et semi-bordée) ;
- Plasmodesmes.

A. Les méristèmes :

-Caractéristiques des cellules méristématiques (taille, forme, organites, nature de la paroi et activité mitotique).

- ## A2. Méristèmes secondaires:

- Caractéristiques cellulaires (taille, forme des différentes cellules, nature de la paroi et activité mitotique).

- ### B. Les tissus de revêtement :

- Caractéristiques des cellules (taille, forme, nature de la paroi) et rôles :

- ### C. Les parenchymes :

- Caractéristiques et rôles des cellules parenchymateuses en fonction de leur morphologie cellulaire :

- Parenchyme assimilateur ;
- Parenchyme de réserve ;
- Parenchyme aérifère ;
- Parenchyme aquifère.

	<u>2- Dédifférenciation cellulaire :</u> - Définition. -Critères des cellules capables de se dédifférencier.
IV. La structure anatomique de différents organes: (3h) A. La racine: B. La tige: C. La feuille:	- Structure primaire. - Structure secondaire. -Comparaison anatomique, sous forme de tableau, entre une racine de Monocotylédone et de Dicotylédone (Eudicots). -Structure primaire. -Structure secondaire. - Comparaison anatomique, sous forme de tableau, entre une tige de Monocotylédone et de Dicotylédone (Eudicots). -Comparaison anatomique, sous forme de tableau, entre la tige et la racine. -Structure primaire. -Structure secondaire. -Comparaison anatomique, sous forme de tableau, entre une feuille de Monocotylédone et de Dicotylédone (Eudicots).

Troisième partie: REPRODUCTION ET MULTIPLICATION VEGETATIVE (8H)

1. Reproduction sexuée (6h)

A. La fleur :

- Différentes pièces florales (Rappel) :

- Pièce stériles : calice et corolle
- Pièces fertiles :

Androcée (description et morphologie) ;

Gynécée (description du carpelle).

-Différents types d'ovaire.

-Structure de l'ovule.

-Différents types de placentation.

B. La fécondation :

-Formation et description du grain de pollen.

-Notion de gamétophyte mâle.

-Formation et description d'un sac embryonnaire.

-Notion du gamétophyte femelle.

-Définition de la pollinisation.

-Différents types et facteurs de pollinisation.

-Germination de grain de pollen.

- Double fécondation (étapes et les résultats).

C. Développement de l'ovule en graine :

-Organisation générale d'une graine.

-Stades de développement d'un embryon de Dicotylédone (Eudicots).

**PROGRAMME DES TRAVAUX PRATIQUES DE BIOLOGIE
VEGETALE -BG1- (15 H)
QUATRE SEANCES DE TP ET UNE SORTIE SUR TERRAIN**

Première Séance (3h)

MORPHOLOGIE DES PLANTES A FLEURS

1- Appareil végétatif :

Observation et dessin :

Racines : différentes zones

Tiges : disposition des bourgeons

Feuilles : analyse et disposition des feuilles (phyllotaxie).

Exemple proposé: *Phaseolus vulgaris*-
Fabacées (Légumineuses).

2-Appareil reproducteur :

Observation et dessin des différentes pièces florales (vue de trois quarts).

Coupe transversale de l'ovaire :
Observation à la loupe et détermination du nombre de loges carpellaires et d'ovules.

Dessin du diagramme floral de l'échantillon (en vue de face).

Détermination de la formule florale.

Matériel végétal proposé :

Diplotaxis erucoides (Brassicacées) ou

Oxalis cernua (Oxalidacées) ou *Plumbago auriculata* (Plumbaginacées) ou *Lilium* (Lelys) (Liliacées).

	En démonstration : ➤ Racine tubérisée [chez <i>Daucus carota</i>-Apiacées (Ombellifères)] ; ➤ Système racinaire fasciculé [chez les Poacées, (Graminées)] ; ➤ Tiges modifiées [tubercule de <i>Solanum tuberosum</i> –Solanacées] ; ➤ Feuilles modifiées_[écailles de bulbe d'oignon <i>Allium cepa</i>- Liliacées (Amaryllidacées).
Deuxième Séance (3h) <u>ETUDE HISTOLOGIQUE ET ANATOMIE DE LA RACINE</u>	
<u>1-Etude histologique :</u> <u>2-Anatomie de la racine :</u>	Techniques histologiques. Réalisation de coupes histologiquessemi-fineset double coloration. Observation et reconnaissance des différents types de tissus. Observation microscopique d'une coupe transversale de racine de Monocotylédones. Observation microscopique d'une coupe transversale de racine de Dicotylédones (Eudicots). Schémas conventionnels et interprétations.

	Matériel végétal <u>proposé</u> : <i>Iris germanica</i>-Iridacées <i>Ranunculussp.</i>-Ranunculacées
Troisième Séance (3h) <u>ANATOMIE DE LA TIGE ET DE LA FEUILLE</u>	
1- <u>Anatomie de la tige</u> :	Observation microscopique de la structure primaire d'une coupe transversale de tige de Monocotylédones. Observation microscopique des structures primaire et secondaire sur une coupe transversale de tige de Dicotylédones (Eudicots). Schémas conventionnels (de la structure primaire des deux échenillions observés) et interprétations. Matériel végétal <u>proposé</u> : <i>Ruscus hypophyllum</i>-Asparagacées (Liliacées) <i>Ecballium elaterium</i>- Cucurbitacées <i>Salvia officinalis</i> - Lamiacées

2- <u>Anatomie de la feuille :</u>	Observation microscopique d'une coupe transversale de feuilles de Monocotylédones et de Dicotylédones (Eudicots)]. Schémas conventionnels des deux coupes observées et interprétations. Matériel végétal <u>proposé</u> : <u>Olea europea</u>-Oléacées <u>Amplodesma mauritanica</u> -Poacées (Graminées)
Quatrième Séance (3h) <u>ETUDE DE GRAINESET DE FRUITS</u>	
1- <u>Les graines :</u>	Observation de: • Graines albuminées : Coupe transversale d'une graine dicotylée (<i>Ricinus communis</i>– Euphorbiacées) Dessin et interprétations. • Graines exalbuminées : Coupe transversale d'une graine de <i>Phaseolus vulgaris</i>- Fabacées (Légumineuses) Dessin et interprétations. Comparaison des deux types de graines étudiées. En démonstration : ➤ Caryopse de maïs (<i>Zea mays</i> – Poacées).

2- Les fruits :

Observation de différents types de fruits.
Identification des caractéristiques et de l'origine de chacun :

- **Fruits charnus** : baies (simples et composées) ;
- **Fruit partiellement charnu** : drupes (simples et composées) ;
- **Fruits secs** : déhiscents et indéhiscents ;
- **Fruits complexes (pseudo-fruit)** ;
- **Fruit composés** (exemple d'infrutescence).

Exemples proposés :

Grains de raisin : [(*Vitis vinifera*-Ampélidacées-(Vitacées)] ;

Tomate (*Solanum lycopersicum*-Solanacées)

Citron (*Citrus limon*- Rutacées)

Framboise (*Rubus idaeus*-Rosacées)

Prune (*Prunus persica*- Rosacées)

Olive (*Olea europea*-Oléacées)

Petits pois (*Pisum sativum*-Fabacées)

Noisette (*Corylus avellana*- Betulacées)

Pomme (*Malus pumila* -Rosacées)

Fraise (*Fragaria vesca*-Rosacées)

Figue (*Ficus carica*- Moracées)

Ananas (*Ananas comosus*-Broméliacées)

SORTIE FLORISTIQUE

Cette sortie vise à observer les notions vues dans le cours et les travaux pratiques :

- Reconnaître les trois ports des Angiospermes: herbacé, arbustif et arborescent ;
- Reconnaître les différents types de fleurs et d'inflorescences ;
- Reconnaître les différents types de feuilles (forme, phyllotaxie).

NB : Les exemples cités dans ce programme restent des propositions, à l'enseignant de choisir le matériel végétal disponible.

Programme de Botanique du Cycle Préparatoire Biologie - Géologie (BG2)

30 heures de cours (un devoir, un examen et un test écrits)
15 h de travaux pratiques (des comptes rendus et un examen TP)

-SECTION I-

Place des végétaux dans le monde vivant (6H)

I-Evolution des systèmes de classification :

A- La classification classique : les grands traits évolutifs du monde végétal et diversité

1- Structure cellulaire:

2- Organisation structurale du végétal:

3- Présence ou absence de vascularisation :

4- Expression de la sexualité :

Représentation classique du règne végétal (bases morphologiques et anatomiques, puis cytologiques et biologiques): Préciser les quatre principaux critères de la classification classique. Identifier les groupes de végétaux en se basant sur chacun des critères cités.

Différence entre les êtres **procaryotes** et **eucaryotes**: Souligner l'absence de la reproduction sexuée typique chez le premier groupe. Citer les sous-groupes des procaryotes:

- Les bactéries
- **Les cyanobactéries** (Algues bleues).
- **Thallophytes** : Appareil végétatif réduit à un thalle (Algues, Champignons et Lichens)
- **Cormophytes** : Présence d'un Cormus (Bryophytes, Ptéridophytes et Spermaphytes)
- **Arhizophytes**: Plantes non vasculaires (Thallophytes et Bryophytes)
- **Trachéophytes** : Plantes vascularisées (Ptéridophytes et Spermaphytes)
- **Cryptogames** : Dissémination par l'intermédiaire des spores (Thallophytes, Bryophytes, et Ptéridophytes).
- **Phanérogames** : Organes de reproduction spécialisés. Dissémination par l'intermédiaire de

C- Place des végétaux dans le monde vivant:

- **Principe et objectifs :**
 - Constitutions de clades, regroupant l'ancêtre commun et ses descendants
 - Formation d'arbres phylogénétique dont les branches se séparent à la faveur d'innovation évolutives
 - Comparaison des acides aminés et de l'ARN pour constituer des clades ou taxons monophylétiques
 - Mise en évidence des groupes polyphylétiques (dérivant de 2 ou plusieurs ancêtres)

L'ancien monde végétal est scindé en **Viridiplantae ou lignée verte** [algues vertes et rouges + plantes terrestres], **le règne des Fungi et la lignée brune** (algues brunes).

La nouvelle division de l'ancien monde végétal se base sur l'apparition du chloroplaste d'où l'étude de l'origine des plastes et **la théorie de l'endosymbiose** (signalerqueles algues brunes ne font plus partie des viridiplantae).

Insister sur le fait que :

- Les protistes sont des eucaryotes unicellulaires. On se limite à l'étude des **protistes à affinité végétale** (phycophytes) et **les protistes à affinité fongique** [les protistes à affinité animale vus en Biologie Animale] ;
- Les champignons forment un règne à part : **règne des Fungi** ;
- **Les algues brunes** font partie de **La lignée brune** ;
- **La lignée verte** est caractérisé par un chloroplaste à double membrane qui contient de la chlorophylle a.
- **La lignée verte** renferme ; Les algues rouges (**Rhodophytes**), les **Chlorophytes** [algues vertes ou **Phycophytes**, les **Charophytes** et le **règne des plantes vertesterrestres**ou **Embryophytes** (Bryophytes, Lycophytes, Spermaphytes)] ;
- **Les deux clades de Rhodophytes**

III-Etude d'un exemple de protiste filamenteux : <i>Spirogyra</i> A-Morphologie : B- Reproduction : B1- Multiplication végétative : B2- Reproduction asexuée : B3-Reproduction sexuée : V- Rôles et utilités des protistes :	Décrire l'archéthalle filamenteux. Expliquer le mode de croissance. Décrire les modes de multiplication végétative. Décrire la sporulation directe. Définir le type de gamie. Etudier le cycle de reproduction et définir les éléments clés. Indiquer l'importance des protistes dans le biotope. Signaler le rôle de certains protistes dans la fermentation industrielle. Mentionner brièvement les dégâts de certains protistes fongiques parasites des végétaux.
Chapitre II (3H) Le Règne des Fungi	
I. Introduction :	Insister sur le fait que les Champignons ne font plus partie du monde végétal. Mentionner leur hétérotrophie. Indiquer les trois modes de vie des champignons : saprophyte, parasite, symbiotique. Rappeler les critères de l'ancienne classification (thalle, spores). Expliquer <u>brièvement</u> la classification phylogénétique des Champignons et mentionner les différents phylums (ou divisions): • Chytridiomycètes • Gloméromycètes • Zygomycètes • Ascomycètes • Basidiomycètes

II- Caractères généraux : III- La Reproduction : A- La multiplication végétative : B- La reproduction asexuée : C- La reproduction sexuée : IV- Rôle des champignons :	Signaler les principaux caractères : la présence du noyau, les organites cellulaires (vacuole centrale, noyau pariétal...), la nature de la paroi et les différents types du thalle de champignons. Expliquer la formation de fructification chez certains champignons (ascocarpe « apothécie et périthèce » et hyménium « carpophore »). Signaler les différentes méthodes de la multiplication végétative. La sporulation directes et les spores asexuées (haploïdes ou diploïdes, mobiles ou immobiles, endogènes ou exogènes). Monter les différents types de gamie. Etudier <u>les cycles de reproduction sexuée</u> chez <i>Rhizopus</i>, <i>Coprinus</i> et <i>Peziza</i> (type de gamie, éléments clés et les différentes phases). Signaler le rôle des champignons dans la chaîne trophique et mentionner brièvement leur utilisation dans les domaines industriel et pharmacologique.
LES LICHENS (30 min)	
I-Introduction :	Préciser que Les Lichens (association symbiotique entre algue-champignons): • ne constituent pas un rang taxonomique ; • sont des organismes doubles ; • résultent de l'union d'un champignon avec une algue ou une Cyanobactérie ; Expliquer les raisons de la symbiose entre le champignon et l'algue.

II-Morphologie et structure : III-Reproduction : A- Multiplication végétative : B- Reproduction sexuée :	Signaler les différents types de thalle sec. Montrer <u>la structure anatomique d'un lichen sec hétéromère</u>. Fragmentation du thalle. Production de propagules (isidies, soridies). Prédominance de la reproduction fongique.
CHAPITRE III (2H) LA LIGNEE BRUNE (les algues brunes) Les Phéophytes	
I- Introduction : II- Etude d'un exemple de Phéophyte: <i>Fucus vesiculosus</i> A-Appareil végétatif : B-Mode de croissance : C- Reproduction : C1-Multiplication végétative :	Signaler que ce groupe: • renferme des <u>organismes eucaryotes, autotrophes, pluricellulaires et qui sont presque tous marines</u> • présente des plastes à quatre membranes riches en fucoxantine (xanthophylles) d'où son appartenance à Lignée brune. • possède un appareil végétatif, très diversifié, non différencié en organe (thalle) • secrète des composés phénoliques à l'intérieur de vésicules appelées physodes. Etudier l'appareil végétatif (Thalle fucoïde) Définir le cladome avec ces différentes parties. Montrer la croissance apicale et la ramification dichotomique du thalle. Expliquer la fragmentation du thalle. Décrire la reproduction asexuée via la sporulation directe.

C2- Reproduction asexuée : C 3-Reproduction sexuée : III-Importance et utilité des Algues brunes:	Mentionner les changements morphologiques du thalle au moment de la reproduction. Expliquer l'oogamie en insistant sur les critères d'évolution de ce type de gamie. Décrire <u>le cycle de reproduction</u> en identifiant <u>les éléments clés</u> et <u>les différentes phases</u>. Indiquer le rôle des algues brunes dans le biotope. Signaler l'utilisation de ces algues.
-SECTION II- <u>Les Viridiplantae</u> CHAPITRE I LES RHODOBIONTES (les algues rouges) (2H)	
I-Introduction : II- Etude d'un exemple de Rhodophytes : <i>Anthitamnion plumulosa</i> A- Appareil végétatif et croissance : B- Reproduction : B1-Multiplication végétative :	Rappeler la théorie de l'endosymbiose (origine des algues rouges) : Insister sur la classification des Rhodobiontes dans la lignée verte qui renferme des organismes avec des chloroplastes à double membrane contenant de la chlorophylle a. Signaler que ce groupe monophylétique est caractérisé par la présence de phycoérythrines. Caractéristiques des algues rouges : eucaryotes, autotrophes, pluricellulaires (Métaphytes), à majorité marines. Etudier l'appareil végétatif (thalle cladomien). Les modes de multiplication végétative.

B2- Reproduction asexuée : B3-Reproduction sexuée : III- Utilisation des Algues rouges:	Rappeler la sporulation directe dans des sporocystes. Rappeler la trichgamie. Décrire le cycle de reproduction en identifiant les éléments clés les générations de ce cycle. Signaler brièvement certaines utilisations des algues rouges dans le domaine agro-alimentaire et cosmétique.
CHAPITRE II LES CHLOROBIONTES A- LES ALGUES VERTES (2H) (Chlorophytes et Charophytes)	
I-Introduction : II- Etude d'un exemple d'Ulvophyceae : <i>Ulva lactuca</i> A- Appareil végétatif: B-Reproduction :	Relations phylogénétiques entre les différents groupes de la lignée verte. Mentionner les principaux caractères (l'appareil végétatif, la structure des chloroplastes, la nature des pigments photosynthétiques et des réserves et les pyrénoides). On observe l'arbre qui schématise les différents groupes de la lignée verte et on commence l'étude groupe par groupe, à travers un exemple type tout en précisant les caractères dérivés propres (évolutifs) : Les Chlorophytes (Chlorophyceae, Ulvophyceae), les Streptophytes (Charophytes et les Embryophytes). Montrer la structure foliacée du thalle. Signaler l'élargissement du thalle par mitose.

B1-Reproduction asexuée :	Sporulation directe.
B2- Reproduction sexuée :	Décrire le cycle de reproduction (type de gamie, éléments clés et différentes phases).
III- Etude d'un exemple de Charophyceae :<i>Chara sp.</i>	Mentionner que la famille des Charophyceae est paraphylétique.
A- Appareil végétatif:	Insister sur le degré de complexité du cladome et l'homologie de sa structure avec la tige aérienne des plantes terrestres.
B- Reproduction :	Insister sur la protection des organes reproducteurs qui simulent les gamétanges. Décrire le cycle de reproduction.
V- Utilisation des Algues vertes:	Mentionner que les <i>Charales</i> constituent d'excellents révélateurs de la bonne santé écologique des milieux qui les abritent. Signaler brièvement certaines utilisations des algues vertes.

CHAPITRE II
LES CHLOROBIONTES
A- LES EMBRYOPHYTES
B-1 : Les Bryophytes *sensu lato*
(3H)

I- Introduction	Les Bryophytes <i>sensu lato</i> regroupent: les Marchantiopsida (Hépatiques), les Anthocéropsida (les Anthocérotes) et les Bryophytes "<i>sensu stricto</i>". Citer les caractéristiques générales des Bryophytes <i>sensu lato</i> ainsi que les caractéristiques distinctives de chacun des groupes. Insister sur : • Le passage de la structure en cyste (sporocystes et gamétocystes) à celle en anse (sporangies et gamétanges). • L'adaptation à la vie terrestre. NB : on se limite à l'étude de deux exemples : <i>Marchantia sp.</i> et <i>Polytrichum sp.</i> Pour chaque espèce, on étudie l'appareil végétatif et la reproduction.
------------------------	---

II- Morphologie et reproduction : A- L'appareil végétatif : B- Reproduction : B1- la multiplication végétative : B2- La reproduction sexuée : III- Rôle des Bryophytes <i>sensu lato</i> dans la biosphère	Etudier l'appareil végétatif de point de vue morphologique et anatomique. Insister sur la présence des rhizoïdes et l'absence des tissus conducteurs. Les modalités de la multiplication végétative. Etudier la structure de l'antheridie et de l'archégone Caractéristiques des gamètes mâles et femelles. Décrire les cycles de reproduction de <i>Marchantia</i> et <i>Polytrichum</i> (type de gamie, éléments clés, notion de protonéma, différentes générations). Montrer les particularités de sporophyte chez les deux exemples étudiés. Signaler certains rôles des Bryophytes.
CHAPITRE II LES CHLOROBIONTES B- LES EMBRYOPHYTES B-2 : Ptéridophytes <i>sensu lato</i>(2H30min) (Les Lycophytes et les Moniliformopses)	
I-Introduction : II- Appareil végétatif et reproduction <i>Polypodium vulgare</i>:	Les Ptéridophytes <i>sensu lato</i> regroupent les Lycophytes, les Moniliformopses (Sphénophytes et Filicophytes). Mentionner les caractères généraux et insister sur la présence des tissus conducteurs primaires chez les espèces actuelles. Etude de l'appareil végétatif: étudier les éléments constitutifs (fronde, racine et feuilles écailleuses); la croissance et l'anatomie de la stèle.

	• Les Coniferophytes (les Gymnospermes) renferment les Ginkgophytes, les Pinophytes, les Cycadophytes, les Gnetophytes. • Les Anthophytes (les Angiospermes) Caractéristiques des Spermaphytes : • Apparition de l'ovule et du grain de pollen (Gymnospermes et Angiospermes) • Evolution de l'ovule, au sein du groupe des Gymnospermes, avant et après la fécondation et son rapport avec la plante mère (notion de pré-graine et de graine) • Les différents groupes des Gymnospermes en sens large (caractères anatomiques).
II-Etude des Gymnospermes <i>sensu lato</i>: A- Appareil végétatif et reproduction sexuée d'une Ginkgophyte : <i>Ginkgo biloba</i> B- Appareil végétatif et reproduction sexuée d'une Pinophyte : <i>Pinus halepensis</i> : C- Appareil végétatif et reproduction sexuée d'une Gnetophytes : <i>Ephedra</i>	Montrer le port Identifier les différentes parties de l'appareil végétatif. Insister sur la pré-graine. Etude de l'appareil végétatif (dimorphisme caulinaire et foliaire). Observation des différentes parties des cônes, mâle et femelle, et interprétation de l'homologie avec la fleur des Angiospermes. Décrire la pollinisation et la fécondation. Décrire le cycle de <i>Pinus halepensis</i> (type de gamie, générations et éléments clés). Etude de l'appareil végétatif et reproducteur mâle et femelle. Décrire la pollinisation et la fécondation.

CHAPITRE II
LES CHLOROBIONTES
B- LES EMBRYOPHYTES
B-4 : Les Angiospermes (4H)

I- Introduction :

Caractères généraux :

- Ovules enveloppés dans des carpelles ;
- Grains de pollen bi- ou tri-cellulaires ;
- Double fécondation, graines dans des fruits ;
- Bois hétéroxylé avec de vrais vaisseaux ;
- Liber avec cellules campagnes.

Classification des Angiospermes (APGIII) :
Citer les différents groupes en signalant les caractères généraux:

1. Les Protoangiospermes

2. Les Euangiospermes (monoapturées et triapturées)

Signaler que les Protoangiospermes est un groupe paraphylétique qui possèdent des caractères archaïques:

- Fleur spiralée ;
- Périante à tépales ;
- Pollen monoaperturé ;
- Carpelles libres ou fermés par une sécrétion.

II-Les caractères généraux :
A- Les Protoangiospermes

B-LesEuangiospermes :
B1- Les Magnoliidées :

Citer les principaux caractères archaïques :

- Fleur à nombreuses pièces florales en hélice ou trimère ;
- Pollen à 0 ou 1 seule aperture ;
- Carpelles séparés ;
- Feuilles simples ;
- Deux cotylédons.

TRAVAUX PRATIQUE DE BOTANIQUE

(5 séances et une sortie sur terrain)

La séance : 1H TD + 2H TP

Les séances de TD et de TP sont réalisées afin que l'étudiant soit capable :

- D'analyser l'appareil végétatif des différents groupes étudiés ;
- D'identifier l'appareil reproducteur spécifique de chaque groupe ;
- De déduire le type de cycle de reproduction et le type de gamie.

Au cours de chaque séance de travaux pratiques, un compte rendu personnel doit être préparé (schémas et conclusions). La sortie botanique est rentabilisée autant qu'une séance de travaux pratiques.

Séance 1 Les Protophytes et les Champignons	
I- Etude des Protophytes: <i>Spirogyra</i>	Etude de l'appareil végétatif et de la reproduction sexuée
II-Etude des Champignons : <i>Rhizopus</i>	Etude de l'appareil végétatif, de la reproduction asexuée et sexuée. En démonstration: la fructification de <i>Coprinus</i> ou <i>Peziza</i> En démonstration : l'appareil conidien d' <i>Aspergillus</i>
Séance 2 LES ALGUES	
I- Les Algues A- Etude des organes de la reproduction sexuée de <i>Fucus</i> sp. :	• Observation d'un conceptacle mâle et dessin d'un spermatocyste. • Observation d'un conceptacle femelle et dessin d'un oocyste.

Séance 5

Les Gymnospermes

Etude de *Pinus halepensis* :

Etude de l'appareil végétatif et des organes reproducteurs mâle et femelle :

- Dissection d'un cône mâle (observation des écailles staminales)
- Observation des grains de pollen à ballonnets.
- Dissection d'un cône femelle (observation des écailles ovulifères)

En démonstration : observation microscopique d'ovule de *Ginkgo biloba* en coupe.

Programme de Biologie du Cycle Préparatoire Biologie - Géologie (BG2) 26 heures de cours & travaux dirigés (première année ; deuxième semestre) un devoir, un examen et un test écrits	
Programme du cours de Génétique formelle et bactérienne (26 heures)	Commentaires
I/ Test statistique chi carré : (30min) Répartition expérimentale, répartition théorique et écart. II/ Conséquences génétiques de la reproduction sexuée au niveau des organismes diplobiontiques : (17 heures 30 min: - heures cours et - heures TD) II-1 Croisement entre individus différents par un seul gène autosomal (monohybridisme), interaction intra-allélique (2H): - Un couple d'allèles • F2 : $\frac{3}{4} \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{4}$; $\frac{2}{3} \frac{1}{3}$ • test cross : $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ - un exemple de gène triallélique II-2 Croisement entre individus différents par un seul gène porté par un chromosome sexuel (2H): - Mâle ou femelle hétérogamétique Différents cas de l'hérédité liée au sexe - Gène porté par la région différentielle de l'X - Gène porté par la région différentielle de l'Y - Gène porté par la région pseudo-autosomique II-3 Croisement entre individus différents par deux gènes (dihybridisme) portés par deux autosomes différents (8H30): II-3-1 Deux gènes sans interaction inter-alléliques (4H): - F2 : $\frac{9}{16} \frac{3}{16} \frac{3}{16} \frac{1}{16}$ - Test cross : $\frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4}$ - Tableau de confrontation des phénotypes (différentes possibilités) II-3-2 Deux gènes avec interaction inter-alléliques: épistasie (4H30) - F2 : avec les 6 types d'épistasie - Test cross : avec les 6 types d'épistasie	Evaluation de l'écart entre répartition expérimentale et répartition théorique ; validation de l'hypothèse Cette partie repose sur les lois de Mendel en traitant des exemples concrets de monohybridisme. Elle sera consolidée par des travaux dirigés en appliquant le test chi-carré comme test statistique. Etude de différents cas possible de ségrégation d'un seul gène porté par un chromosome sexuel dans les différents cas de figures. Des travaux dirigés consolident cette partie Cette partie traitera les deux types d'interactions intra-géniques de deux gènes indépendants physiquement avec les différentes combinaisons possibles Détailler les différents cas d'interactions épistatiques pour une descendance F2 et test cross. Des travaux dirigés consolident cette partie

II-4 Croisement entre individus différents par deux gènes portés par un même autosome (5H): II-4-1 Influence de la liaison sur la ségrégation (Liaison de couplage et Liaison de répulsion) : conséquences des crossing-over, pourcentage de recombinaison et distance génétique II-4-2 Test trois points III/Génétique des micro-organismes : (8H) III-1 La conjugaison des bactéries (5H) - Cultures des bactéries - Conjugaison bactérienne - Propriétés du facteur de fertilité - Détermination d'un groupe de liaison par expérience d'interruption de transfert - Recombinaison génétique chez les bactéries III-2 Transformation chez les bactéries (2H) III-3 Transduction bactérienne (1H)	Les groupes de liaison feront l'objet d'une étude détaillée en insistant sur l'influence de chaque type de liaison sur la ségrégation. L'accent sera mis dans cette partie sur le calcul des distances génétique et la cartographie des gènes sans calcul avec le test trois points. Des travaux dirigés consolident cette partie Notion de prototrophie et auxotrophie. Description des expériences mettant en évidence le transfert horizontal des gènes entre bactéries via le facteur de fertilité. Mode de transfert et d'intégration de du facteur F et obtention de souche Hfr. Description et application pour déterminer la disposition et l'ordre des marqueurs génétique sur le chromosome bactérien. Modification de l'information génétique in-vitro : transformation. Description du cycle lytique et lysogénique et alternance des deux cycles. notion phage virulent et phage tempéré. Des travaux dirigés consolident cette partie
---	---

Programme de Physiologie Animale du Cycle Préparatoire
Biologie - Géologie (BG2)
30 heures de cours
10 h de Travaux dirigés
(un devoir, un examen et un test écrit)

Ce programme est destiné à permettre aux étudiants d'assimiler les lois naturelles qui régissent le fonctionnement de divers organes à l'intérieur d'un organisme animal. Cet organisme est lui-même capable d'intégrer tous les éléments variables de son milieu environnant afin de s'y adapter tout en maintenant l'intégrité de son unité fonctionnelle à travers les corrélations hormonales mais aussi nerveuses.

Ce programme s'inscrit entre deux continuités, tout d'abord avec Les programmes rénovés de l'enseignement secondaire et d'autre part avec les enseignements partagés dans les écoles d'ingénieurs voir même avec les enseignements universitaires. Ce programme définit des contenus (faits, modèles concepts..) qui constituent non seulement une base de connaissances de premier ordre indispensables à l'organisation du savoir, pour préparer des étudiants avec un niveau requis pour poursuivre avec succès leur cursus d'ingénieurs, de chercheur voir même de scientifique, mais aussi pour permettre de se former tout au long de leur vie.

Le programme est présenté en trois colonnes.

- La colonne à gauche comprend les thèmes des chapitres.
- La colonne du centre comprend les éléments centraux de chaque thème
- La colonne à droite comprend les diverses informations destinées à préciser ces attendus.

Chapitres	contenus	Capacités exigibles
Le premier chapitre : La physiologie intégrative (8 h)	Introduction à la physiologie intégrative et la notion d'homéostasie I. Les compartiments liquidiens de l'organisme 1. Le sang :	• Distinguer les compartiments liquidiens de l'organisme. • Préciser la composition du milieu intérieur • Rappeler l'organisation générale du système circulatoire : circulation systémique et circulation pulmonaire. • Présenter les différents segments vasculaires. l'appareil circulatoire est un système de distribution à haut débit de nutriments, de gaz...au sein de l'organisme. Le cœur est une pompe qui met le sang sous pression, la pression artérielle moyenne est la résultante de paramètres circulatoires (débit et résistance vasculaire) et du débit cardiaque.

	1.1.2 Les Globules Blancs = Leucocytes a- Caractères généraux : forme, taille, nombre, durée de vie, origine. b- Rôle des différents types de globules blancs 1.1.3 Les plaquettes = Thrombocytes a - Caractères généraux : forme, taille, nombre, durée de vie, origine. b- Rôle des plaquettes : l'hémostase c-Schéma simplifié de la coagulation sanguine 1.2 Le plasma a- Composition (protéines de constitution et lipoprotéines) b- Notion d'équilibre électrolytique (notion de mEq de cations et d'anions) c- Notion d'équilibre osmotique : osmolarité et mosmoles (isotonie, plasmolyse et turgescence) d- Notion de pression oncotique : (notion d'albuminurie et d'albuminémie) e. Le pH, équilibre acido-basique 2. La lymphe 2.1 Origine 2.2 différents types (liquide interstitiel, lymphe canalisée et liquide transcellulaire) 2.3 rôle du système lymphatique (drainage, immunitaire et digestif)	- Présenter les types de leucocytes, les lignées de différenciation et la formule leucocytaire. - Détailler le rôle des LB, LTC , LT4, LT8, L mémoires - Mettre en valeur : • le rôle des anticoagulants : héparine, EDTA • la dégradation du caillot sanguin • l'équilibre hémostatique : entre activateurs et inhibiteurs ou procoagulants et anticoagulants, • la notion de déséquilibre hémostatique : hémorragies et thromboses - Préciser le rôle des différentes protéines de constitution plasmatiques : • l'albumine : Pression Oncotique et transport non spécifique • les Globulines : transport spécifique et anticorps : différents types d'anticorps, structure d'un anticorps, • le fibrinogène : la coagulation • les LDL et HDL
--	---	--

	II- Echanges entre les compartiments liquidiens de l'organisme - les échanges hydriques : - entre plasma et liquide interstitiel (pression oncotique et pression hydrostatique) - entre compartiments intra et extracellulaire (pression osmotique) - les échanges électrolytiques : - entre plasma et liquide interstitiel (neutralité des protéines : équilibre de Donnan : perméabilité passive) - entre compartiments intra et extracellulaire (Notion de pompe sodium : perméabilité active)	Montrer la mise en place entre les compartiments liquidiens de l'organisme, d'un équilibre dynamique et non statique Discuter la notion d'homéostasie.
Le deuxième chapitre : Le système nerveux (10h)	I. Organisation générale du système nerveux: - Différentes parties du système nerveux : SNC et SNP (système nerveux somatique et système nerveux végétatif). - Différents types cellulaires : la cellule nerveuse ou neurone et les cellules gliales II- Physiologie de la cellule nerveuse - Structure - Physiologie - Les potentiels de membrane : propriétés et origine - Le potentiel de repos - Le Potentiel électrotonique ou local présence	- Présenter l'organisation générale du système nerveux cérébrospinal. - Signaler l'importance des méninges, de la barrière hémato-encéphalique, du liquide cérébrospinal, de sa circulation, et de la présence de ventricule. - Montrer la présence majoritaire des cellules gliales dans le du tissu nerveux, - Attribuer à chaque type les rôles correspondants. - Signaler la subdivision du neurone en dendrites soma, axone, et arborisation terminale. - Définir le transport axonal antigrade et rétrograde - Construire la notion des canaux ioniques, du potentiel d'équilibre de l'ion et de l'équation de Nernst

	4. Les neurotransmetteurs : différents classes et devenir après action (mimétique et lytique). Exemple à traiter : acétylcholine et noradrénaline et leurs types de récepteurs IV. Le système nerveux végétatif 1. Structure anatomique et physiologie du système nerveux végétatif a- Le système nerveux parasympathique (notion de neurotransmetteurs pré et post ganglionnaires, rôles sur les organes vitaux) b- Le système nerveux sympathique (notion de neurotransmetteurs pré et post ganglionnaires, rôles sur les organes vitaux) c- Les Centres de régulation hypothalamiques et bulbaires.	- Mettre au point le concept des neuromédiateurs ou neurotransmetteurs, des neuro-modulateurs, des agonistes et des antagonistes. des récepteurs muscariniques et nicotiniques. - Donner l'effet des drogues sur la membrane post-synaptique, traiter les exemples de la caféine, du curare et de l'atropine. - Etablir le lien entre le système nerveux végétatif et la médullo-surrénale (notion de ganglion modifié)
Le troisième chapitre : Le système Endocrinien (12 h)	I- Introduction : définition du système endocrinien et de l'hormone II- Les grands types de glandes : endocrines, exocrines et mixtes III- Principales glandes endocrines (axe hypothalamo-hypophysaire, thyroïde, parathyroïdes, pancréas, surrénales et gonades) et leurs hormones. IV- classification des hormones (peptidiques, monoaminées et stéroïdes) V- Biosynthèse, stockage et sécrétion des hormones	

	1- Les hormones peptidiques (pré-pro-hormones, pro-hormones et hormones) <u>Exemple à traiter : Cas de l'insuline</u> (chaîne A, B et peptide C) 1- Les hormones dérivées d'acide aminé <u>Exemple à traiter :</u> Les hormones thyroïdiennes (T2, T3, T4) et les hormones de la médullosurrénale (les catécholamines : dopamine, adrénaline et noradrénaline) 2- Les hormones stéroïdes (les hormones de la corticosurrénale et des glandes sexuelles) VI- Transport des hormones dans le sang VII- Les mécanismes d'action des hormones sur leurs cellules cibles 1- Les voies de communication et de signalisation cellulaire (voie endocrine, paracrine et autocrine) 2- Les récepteurs hormonaux 3- Les phénomènes déclenchés par la liaison de l'hormone au récepteur a- Cas des hormones hydrophiles (peptidiques et catécholamines) : notion de transduction du signal via un second messager	- Discuter le mode de transport des hormones dans les liquides biologiques : hormone libre et hormone liée - Préciser le rôle des protéines de transports dans la conservation de l'hormone dans les liquides biologiques - Voir la notion de transporteurs spécifique et non spécifique (albumine CBG, SBG, TBG...) - Insister sur le fait que l'hormone agit sur la cellule cible par modulation d'un programme cellulaire préexistant - Décrire le rôle de l'AMPc, et du calcium. Application : cas de l'adrénaline : à action mécanique et à action métabolique
--	--	--

	b- Cas des hormones lipophiles (stéroïdes et thyroïdiennes) : notion d'activation de récepteurs cytoplasmiques et/ou nucléaires VIII- Le Catabolisme et l'excrétion des hormones IX- Les mécanismes de régulation de la sécrétion hormonale 1- Régulations nerveuse (SN végétatif) et humorale (ionique, chimique et hormonale) 2- Les systèmes de régulation mettant en jeu l'hypothalamus et l'hypophyse a-Notion de rétrocontrôle (positif et négatif, boucle courte et boucle longue) 3- Régulation par les recepteurs (internalisation, recyclage et synthèse)	- Définir : • Demie vie • TCM Voir les processus de : - l'activation, l'inactivation par le métabolisme hépatorénal - La catalyse de la formation d'une hormone active à partir d'une protéine plasmatique Interpréter les corrélations entre l'hypothalamus et la neurohypophyse (corrélation nerveuse, relation directe) d'un coté et l'hypothalamus et l'adenohypophyse de l'autre coté (corrélation hormonale, libérines et statines, relation indirecte vasculaire)
--	---	---

Programme des TD		
Les séances de TD : 5 séances	1- Régulation de la glycémie 2- Notion de réflexes végétatifs 3-4 Régulation de l'équilibre hydro-électrolytique 5- Régulation phosphocalcique	Régulation hormonale et nerveuse Reflexe cardio-vasculaire : pression artérielle Réflexe cardio-modérateur et réflexe cardio-accélérateur • Régulation de la volémie et de l'osmolarité plasmatique (ADH, ANF) • Régulation de la kaliémie et de la natrémie (Aldostérone, système rénine-angiotensine). PTH, Calcitonine, Vit D

Programme de Physiologie Végétale du Cycle Préparatoire

Biologie - Géologie (BG2)

30 heures de cours (un devoir, un examen et un test écrits)

5 H de Travaux dirigés

10 h de travaux pratiques (des comptes rendus et un examen TP)

SECTION I : SOL-PLANTE-ATMOSPHERE : Relation plante - eau

CHAPITRE I : NUTRITION HYDRIQUE ET MINERALE

Introduction : Les plantes vivent dans un milieu inorganique, composé surtout d'eau, de nutriments minéraux, de dioxyde de carbone et d'oxygène. Le dioxyde de carbone pénètre par les parties aériennes, l'oxygène pénètre à la fois par la partie aérienne et la racine, l'eau et les substances minérales étant absorbées surtout par le système racinaire.

Un système racinaire sain et actif ainsi qu'une bonne disponibilité en eau et en nutriments sont nécessaires à la physiologie de la plante et à son développement

Pour croître et se développer les plantes vertes utilisent l'eau, les ions minéraux et le gaz carbonique (CO₂) du milieu. Dans une première partie il convient d'étudier l'eau qui est d'une extrême importance pour tous les processus vitaux ; en seconde partie les échanges d'ions qui lui sont étroitement liés. Ces éléments minéraux participent aux structures des plantes et contribuent à leurs activités.

A/ La nutrition hydrique (3H)

1-Propriétés de l'eau 1.1. La polarité 1.2. La cohésion 2-Les forces de liaison 3- Teneur en eau	- Définir la polarité et la cohésion - Définir les forces de liaisons de l'eau avec les constituants des systèmes naturels : forces osmotiques; forces matricielles - TE, TER, DH, facteurs de variations (TP)
4-Mouvement de l'eau dans le système Sol-Plante-Atmosphère 4.1. Etapes du mouvement de l'eau 4.2. Forces motrices du mouvement de l'eau 4.3. Transpiration	- Décrire les étapes du mouvement de l'eau : l'absorption racinaire ; le transfert horizontal ; l'ascension dans le xylème ; l'émission dans l'atmosphère (transpiration) - La poussée radiculaire ; l'aspiration foliaire (théorie de la cohésion) - Transpiration (en TP)
5- Les échanges d'eau dans la cellule végétale 5.1. Les membranes biologiques 5.2. La diffusion 5.2.1. La diffusion facilitée 5.2.2. L'osmose 5.3. Le potentiel hydrique	- Importance des membranes biologiques - Définir la diffusion ; la diffusion facilitée ; l'osmose - Le potentiel hydrique se divise en plusieurs composantes : le potentiel osmotique, le potentiel matriciel, le potentiel de pression ou de turgescence, le potentiel de gravitation

B/ La nutrition minérale (3H)

1-Classification 2-Critères d'essentialité	- Définir : les macroéléments ; les oligoéléments - Qu'est ce qu'un élément essentiel - Rôles et symptômes de carence (Tableau)
---	---

3-Variations de la composition minérale 3.1. Espèces 3.2. Age et maturité de l'organe 3.3. Composition du sol et facteurs externes	- Définir les variations, en fonction de différents facteurs : l'espèce ; l'âge et la maturité de l'organe ; la composition du sol et facteurs externes
4- L'absorption minérale 4.1. Les modalités de l'absorption 4.2. Le transport dans les membranes 4.3. Déroulement de l'absorption en fonction du temps 4.3.1. Les doses utiles 4.3.2. Destinée des éléments minéraux 4.4. Détermination des besoins nutritifs 4.4.1. Méthode unifactorielle 4.4.2. Méthode à somme constante	- Sélectivité, formes d'absorption (ions, chélats) Synergie, antagonisme - Les membranes biologiques : diffusion simple, diffusion facilitée, transport passif, transport actif. - Cinétique de l'absorption (active, passive). Système de Donnan : (définition, formule, conséquences) - Courbe d'action, consommation de luxe - Absorption, accumulation, sécrétion dans le xylème, excrétion.
SECTION II : PHYSIOLOGIE DE LA CROISSANCE ET DU DEVELOPPEMENT	
CHAPITRE II : LES PHYTOHORMONES, SUBSTANCES REGULATRICES DU DEVELOPPEMENT (2H)	
Introduction : Les hormones végétales sont des substances responsables de la régulation du développement et de l'intégration des activités des différents organes de la plante. Elles agissent à très faible dose (de l'ordre de 1 µM), généralement loin de leur lieu de production, de manière plus ou moins spécifique sur des cellules ou des tissus, et souvent en interaction les unes avec les autres.	
1- Notion de phytohormone 2- Classification	- Définition - Les auxines, les cytokinines, les gibbérellines (GA), l'éthylène (C₂H₄), l'acide abscissique (ABA) l'acide jasmonique et l'acide acétyl-salicylique
3- Caractéristiques spécifiques et effets physiologiques 3.1. Les phytohormones de la croissance 3.1.1. Auxine (AIA) 3.1.2. Cytokinines (CKs) 3.1.3. Gibbérellines (GAs)	- Pour chaque phytohormone définir le lieu de synthèse, le transport et le mode d'action - Rôles physiologiques
4- Croissance en danger: Hormones du stress 4.1. Acide abscissique (ABA) 4.1.1 Fermeture des stomates 4.1.2. Maturation des graines des pays tempérés 4.2. Ethylène 4.2.1. Maturation des fruits 4.2.2. Abscission 4.2.3. Croissance des organes 4.2.4. Epinastie 4.3. L'acide jasmonique	- Pour chaque phytohormone définir le lieu de synthèse, le transport et le mode d'action - Rôles physiologiques

4.4. L'acide salicylique

CHAPITRE III : PHYSIOLOGIE DE LA GERMINATION (2H)

Introduction : La germination est un phénomène qui conduit la semence à une *plantule viable* capable de poursuivre son développement. La semence est un organe en *état de vie ralentie*, caractérisé par une activité métabolique réduite. La vie ralentie (latente) est un moyen pour le végétal de résister aux conditions défavorables de l'environnement. La germination peut donc être définie comme l'ensemble des processus qui marquent la reprise des activités métaboliques et des échanges avec le milieu ambiant (surtout échanges d'eau et d'oxygène au départ). Elle débute avec l'imbibition de la semence et s'achève dans les quelques heures qui précèdent la percée des enveloppes par la radicule.

1- Constitution des semences 2- Maturation et longévité des semences 2.1. Maturation morphologique 2.2. Maturation physiologique 2.3. Longévité	- Définir le terme semence en tant que organe de reproduction de la plante - La maturation morphologique se produit sur la plante mère, et se termine par une déshydratation poussée de la semence - La maturation physiologique correspond à des modifications internes - La longévité est la durée de vie des graines dans les conditions naturelles.
3- Cinétique de la germination	- Définir la capacité germinative - Définir la vitesse de germination
4- Phases de la germination 4.1. Imbibition 4.2. Germination s.s. 4.3. Croissance de la radicule	- Définir les phases de la germination phase I ou phase d'imbibition phase II ou phase de germination phase III Croissance de la radicule ou phase de levée
5- Conditions de la germination 5.1. Conditions externes 5.2. Conditions internes	- Conditions externes Eau, oxygène, température et lumière (semences photolabiles, scotolabiles et indifférentes) - Conditions internes Maturité de la graine Longévité de la graine Semence vivante – pouvoir germinatif – semence mure-aptitude à germer (semence non dormante)
6- Dormances embryonnaires 6.1. Types de dormances 6.2. Déterminisme des dormances 6.3. Relativité des phénomènes de dormance 6.4. Levée des dormances embryonnaires	- Définir les dormances embryonnaires - Définir les dormances primaires - Définir les dormances secondaires - Le déterminisme des dormances est basé sur les Corrélatons entre organes et l'équilibre entre les phytohormones - La dormance n'est donc pas une <i>inaptitude absolue</i> à la germination, mais plutôt une <i>restriction des conditions compatibles</i> avec une bonne germination Levée des dormances embryonnaires : Stratification ; Ablation des cotylédons ; Traitement par des

	phytohormones
7- Contrôle hormonal de la germination 7.1. Tissus de régulation 7.2. Processus de régulation	- Définir les tissus des semences qui régulent la germination - Cas des graines amylacées et processus de régulation hormonale - Cas des graines oléagineuses et processus de régulation hormonale
8- Conservation des semences	- Au cours du stockage des semences, il y a une perte progressive du pouvoir germinatif, en raison: a) de la dénaturation des protéines, des acides nucléiques, et des membranes cellulaires, b) de l'accumulation dans la graine de produits toxiques. La <i>température</i> et l'<i>humidité</i> sont les deux principaux facteurs qui modifient la longévité des semences.
CHAPITRE IV : CROISSANCE, MORPHOGENESE ET DEVELOPPEMENT (3H)	
Introduction : Au cours de leur développement, tous les organismes vivants sont capables de changer de forme, de dimensions et de poids. La croissance désigne l'ensemble des <i>modifications quantitatives irréversibles</i> qui se produisent pendant le développement. La croissance d'une plante met en jeu l'augmentation du nombre et de la taille des organes préexistants.	
1- Définitions	Définir : - Modifications quantitatives - Croissance à l'échelle de l'organe - Croissance à l'échelle de la cellule : mères, auxè
2- Organes de croissance	Semences, racine, tige, bourgeon, feuille
3- Critères de croissance et méthodes de mesure	- Biomasse, épaisseur, longueur, surface - méthodes de mesure : * Mesure des dimensions géométriques d'un organe (mesurer la longueur, hauteur, largeur) par des procédés optiques ou photographiques et à l'aide d'instruments métriques ou d'auxanomètres pour des mesures fines de l'augmentation des dimensions linéaires. . * Mesure de l'augmentation de masse (masse de matière fraîche ou masse de matière sèche) à l'aide d'une balance de précision. * Détermination de l'augmentation de la masse d'azote protéique synthétisé. * Mesure des variations de diamètre (utilisées surtout pour les espèces arborescentes) réalisées à l'aide d'un appareil appelé dendrographe. * Mesure de la surface foliaire à l'aide d'un planimètre qui la calcule électroniquement.

4- Mode d'expression de la croissance	- Croissance absolue - Croissance relative - Vitesse de croissance - Vitesse de croissance relative - Taux de croissance
5- Cinétique de la croissance : Les phases de la croissance	Définir : - Phase de latence - Phase exponentielle - Phase linéaire - Phase de sénescence
6- Les mouvements de croissance 6.1. Mouvements révolutifs (ou de circumnutation) 6.2. Nasties a) Photonasties b) Thermonasties 6.3. Tropismes	*Certains mouvements de croissance sont de type exogène, d'autres sont de type endogène. <i>*Les modalités de positionnement dans l'espace constituent un aspect essentiel de la biologie des organismes et de leur vie en relation avec l'environnement.</i> *Définir : - les mouvements révolutifs - les nasties - les tropismes

CHAPITRE V : A - PHYSIOLOGIE DE LA FLORAISON (3H)

Introduction : dans le cycle de développement d'une Angiosperme, la mise à fleur correspond à une étape de différenciation au cours de laquelle le bourgeon passe de l'état végétatif à l'état reproducteur. L'initiation florale est une différenciation qui présente deux phases : l'évocation florale et l'organogenèse florale.

La *maturité de floraison* est le stade végétatif que doit atteindre le végétal pour être capable de mettre à fleur. Chez les arbres fruitiers, par exemple, la maturité de floraison nécessite 5 à 7 ans.

1- Acquisition de l'aptitude à la floraison 1.1. Vernalisation 1.2. Exigences spécifiques 1.3. Mécanismes 1.3.1 La maturité de vernalisation 1.3.2 Perception de la vernalisation 1.3.3 La dévernalisation 1.3.4 Les traitements de substitution 1.4. Thermopériodisme	Une plante ne devient capable de fleurir que si elle a acquis, à un stade plus ou moins précoce de son développement, l'aptitude à la floraison. Cette acquisition : * est spontanée *nécessite l'intervention des basses températures (<i>vernalisation</i>) *ou des températures élevées (<i>thermo-induction chaude</i>). Exigences spécifiques de la vernalisation * espèces indifférentes * espèces préférentes * espèces à vernalisation obligatoire Le thermopériodisme désigne la réaction de la plante à l'alternance quotidienne ou saisonnière des températures, en relation avec la floraison.
2- Mise à fleur 2.1 Facteurs trophiques 2.2 Photopériodisme 2.2.1 Définitions a) Hémérophase, Photophase ou Photopériode	Deux types de facteurs contrôlent la mise à fleur : facteurs trophiques (le rapport C/N (sucres/matières azotées)) et facteurs environnementaux (Photopériodisme).

b) Nyctiphase, Scotophase ou Nyctipériode c) Eupériode d) Dyspériode 2.2.2 Exigences photopériodiques a) les espèces <i>indifférentes</i> b) les plantes de <i>jours courts</i> (JC), ou espèces <i>nyctipériodiques</i> c) les plantes de <i>jours longs</i> (JL) ou espèces <i>hémériopériodiques</i> 2.2.3 Mécanismes a) L'induction photopériodique b) Le lieu de perception du stimulus photopériodique c) La phase obscure contrôle la photoinduction	
CHAPITRE V : B- LE PHYTOCHROME (3H)	
Introduction : Le phytochrome est un pigment photorécepteur très répandu chez les végétaux ; il contrôle plusieurs processus physiologiques, depuis la germination jusqu'à la floraison.	
1- Mise en évidence 1.1. Germination de la laitue 1.2. Floraison du <i>Xanthium</i>	La découverte du phytochrome part de deux observations, l'une sur la germination des akènes de laitue, l'autre sur la floraison du <i>Xanthium</i>
2- Nature du système photorecepteur	Le phytochrome est une chromoprotéine qui se présente sous deux formes
3- Localisation, Isolement et Dosage	Localisation : régions méristématiques des racines et des tiges Isolement : par chromatographie sur colonne Dosage : par <i>spectrophotométrie</i> à $\lambda=660$ nm et $\lambda=730$ nm
4- Fonctionnement du Phytochrome 4.1. Germination de la laitue 4.2. Floraison du <i>Xanthium</i> 4.3. Interprétation des résultats	Fonctionnement du Phytochrome, se baser sur les deux expériences : germination de la laitue et floraison du <i>Xanthium</i> Interpréter les résultats en se basant sur le passage du phytochrome de la forme inactive à la forme active et vis versa.
5- Mécanismes à l'échelle moléculaire	La réponse physiologique à l'éclairement se fait en 3 étapes : - la <i>réception</i> . - la <i>transduction</i> - l' <i>induction</i>
6- Phénomènes contrôlés par le phytochrome 6.1. Germination 6.2. Croissance 6.3. Floraison 6.4. Mouvements d'organes 6.5. Potentiel électrique transmembranaire	Mettre en évidence le rôle du phytochrome dans les phénomènes physiologiques cités

6.6. Biosynthèse de pigments et d'enzymes	
SECTION III : METABOLISME CARBONE ET AZOTE DES PLANTES VASCULAIRES	
Le premier Principe de la thermodynamique dit : “ l'énergie ne peut ni être créée ni être détruite, elle ne peut qu'être transformée ”. Par opposition aux êtres inanimés, les êtres vivants sont capables de transformer l'énergie en ses différentes composantes, énergie chimique (ATP), travail, chaleur, etc., ce qui leur permet entre autres d'édifier et de maintenir une structure organisée au cours de leur évolution. La seule source universelle d'énergie pour la cellule est l'ATP. Pour former l'ATP la cellule dispose de deux sources : - le catabolisme des glucides, des lipides et accessoirement des acides aminés et des protéines. La cellule va récupérer une partie de l'énergie des liaisons entre les différents atomes des composés dégradés. - l'anabolisme : en présence de lumière, seuls les organismes chlorophylliens sont capables d'exploiter cette source d'énergie et de la convertir en ATP. Les organismes vivants sont le siège de réactions chimiques au cours desquelles varie l'énergie libre susceptible d'être utilisée pour la formation de l'ATP. La croissance d'une plante (augmentation de sa biomasse) résulte d'un équilibre entre gain et perte de carbone : les gains proviennent de la photosynthèse et les pertes proviennent de la respiration : rejet du CO₂.	
CHAPITRE VI : METABOLISME RESPIRATOIRE (4H)	
1. Rappel 1.1 Oxydation du glucose 1.2 La glycolyse 1.3 Décarboxylation du pyruvate via le cycle de Krebs	- Dans l'oxydation du glucose, la molécule est scindée et les atomes d'hydrogène (les électrons et les protons qui les accompagnent) sont arrachés aux atomes de carbone et combinés à l'oxygène qui sera, ainsi, lui-même réduit. Les électrons passent de niveaux énergétiques élevés à des niveaux inférieurs d'où libération d'énergie. - Rappeler succinctement les dix étapes de la glycolyse déjà vue en biochimie Produit de la glycolyse, le pyruvate passe du cytosol à la matrice de la mitochondrie où il est oxydé et décarboxylé. Au cours de cette réaction exergonique, une molécule de NADH est produite à partir de NAD⁺
2. Structure et caractéristiques de la mitochondrie 2-1 Structure 2-2 Caractéristiques : Formation concomitante de nucléotides pyridiniques réduits (NADH + H ⁺ / FADH ₂)	- Structure de la mitochondrie : membrane externe, membrane interne et matrice - Formation des nucléotides pyridiniques réduits (NADH + H⁺ / FADH₂) : équation globale du cycle de Krebs (rappel)
3. Mécanisme de la respiration : La chaîne respiratoire 3-1 Introduction	- La chaîne respiratoire ou chaîne de transfert d'électrons est localisée dans la membrane interne des mitochondries. Chaque mitochondrie contient des milliers d'exemplaires de la chaîne de transfert

3-2 Caractéristiques générales des complexes protéiques de la chaîne respiratoire 3-3 Mécanismes du transfert des électrons a. Le complexe I : NADH - coenzyme Q oxydoréductase b. Le complexe II : succinate - coenzyme Q oxydoréductase c. complexe III : coenzyme Q - cytochrome c oxydoréductase d. Le complexe IV : cytochrome c oxydase 3-4 Enzymes supplémentaires spécifiques de la chaîne respiratoire chez les végétaux 3-5 Bilan - résumé de la chaîne de transfert d'électrons	d'électrons. - Décrire les quatre complexes protéiques de la chaîne respiratoire. - Décrire les réactions d'oxydo-réduction qui se déroulent dans chaque complexe et qui aboutissent au transfert des électrons. - Enzymes supplémentaires spécifiques de la chaîne respiratoire chez les végétaux : a. Les NAD(P)H déshydrogénases interne et externe. b. L'oxydase alternative ou AOX - Bilan : Dans l'enchaînement des réactions d'oxydo-réduction qui ont lieu lors du transfert des électrons de l'ensemble de la chaîne de transport d'électrons on constate que : • le premier donneur de protons et d'électrons (NADH + H⁺) • le dernier accepteur d'électrons (l'oxygène moléculaire, O₂) Donner donc les deux demi-réactions rédox Donner le nombre de molécules d'ATP synthétisées par molécule de (NADH + H⁺) réoxydée.
4. Théorie chimio-osmotique - Synthèse d'ATP par l'ATP synthase 4-1 Rappel sur l'expulsion des protons au cours de la chaîne de transport d'électrons 4-2 La théorie chimio-osmotique et la force proton motrice 4-3 Le complexe V ou ATP synthase 4-4 Expression de la force proton motrice Δp 4-5 Le mécanisme de la synthèse de l'ATP par l'ATP synthase 4-6 Transport de l'ATP formé au cours de la respiration	-La théorie chimio-osmotique formulée par Peter Mitchell en 1961 postule que le gradient de concentration de protons crée à travers la membrane sert de réservoir d'énergie libre pour la synthèse d'ATP. -Le complexe V, appelé ATP-synthase F₀F₁, se sert du gradient de concentration de protons comme source d'énergie pour synthétiser l'ATP -Expression de la force proton motrice Δp (exprimée en volts) : $\Delta p = \Delta \Psi + Z \cdot \Delta pH$ -Décrire l'ATP synthase, cylindre composé de sous-unités α et β alternées -L'ATP produit dans la mitochondrie doit retourner vers le cytosol pour y être utilisé pour les divers travaux cellulaires.
5. Bilan de la respiration - Intensité respiratoire et contrôle respiratoire 5-1 Bilan de la synthèse d'ATP au cours de la respiration 5-2 L'intensité respiratoire et le contrôle respiratoire 5-3 Inhibiteurs et agents découplants de la respiration Cette partie (5) peut être traitée en TD	- Faire un bilan de la synthèse d'ATP au cours de la respiration, sous forme de tableau, en tenant compte de toutes les étapes depuis la glycolyse - L'intensité respiratoire (IR) est la quantité d'oxygène consommé (ou de CO₂ dégagé) par unité de temps et de matière biologique (masse, nombre, surface, ...).

	Exemple : IR = 150 pmoles O₂ / min / mg protéine - La dépendance de la vitesse de respiration en fonction de la disponibilité de l'ADP (substrat de l'ATP synthase) est appelé contrôle respiratoire. $\text{contrôle respiratoire} = \frac{\text{IR en présence d'ADP}}{\text{IR en absence d'ADP}}$ - Inhibiteurs et agents découplants de la respiration : Il existe six types d'inhibiteurs qui affectent le fonctionnement de la mitochondrie - Les inhibiteurs de la chaîne respiratoire (cyanure, antimycine, thenoyl-trifluoroacétone ou roténone obtenue à partir de plantes tropicales). Ils bloquent la respiration en présence d'ADP ou d'un agent découplant. - Les inhibiteurs du transport (atractyloside, N-éthyl maléimide). Ils empêchent soit l'exportation de l'ATP, soit l'importation de la molécule précurseur, au travers de la membrane mitochondriale interne. - Les ionophores (valinomycine, nigericine). Ils rendent la membrane mitochondriale interne perméable à des composés qui normalement ne pourraient pas franchir cette membrane. - Les inhibiteurs du cycle de Krebs (arsenite, amino-oxyacétate). Ils inhibent une ou plusieurs enzymes de ce cycle. - Les inhibiteurs de la phosphorylation (oligomycine). - Les agents découplants (2,4 dinitrophénol, CCCP). Ils dissipent artificiellement le gradient de protons et il n'y a plus synthèse d'ATP. Le transfert d'électrons et la consommation d'O₂ sont à leur maximum. Le carbonyl cyanide m-chloro-phenyl hydrazone (CCCP) est un composé lipidique faiblement acide. C'est un agent découplant très fort.
CHAPITRE VII : METABOLISME PHOTOSYNTHETIQUE (4H)	
Introduction : C'est la principale voie par laquelle l'énergie de l'environnement est disponible pour le monde vivant. C'est aussi la principale source de composés à carbone réduit	
- Définition et importance - L'autotrophie - La photosynthèse	- Importance de la chlorophylle a dans l'autotrophie - Conversion de l'énergie solaire en énergie chimique potentielle - Synthétèse de la matière organique à partir du CO₂ et de l'eau

2- Structure du chloroplaste 2.1. les pigments du chloroplaste 2.2. structure	- chlorophylle a, la chlorophylle b et les pigments accessoires - la membrane externe et la membrane interne - le stroma - les systèmes membranaires : les thylakoïdes ou lamelles (granaires ou stromatiques) - L'espace intrathylakoïde
3- Mécanisme de la photosynthèse 3.1. les phases de la photosynthèse 3.2. chaîne de transfert des électrons et photophosphorylation acyclique 3.3. Photophosphorylation cyclique 3.4. Les réactions de fixation du carbone	- Réactions de transduction de l'énergie = phase lumineuse = phase photochimique = réaction claire - Réactions de fixation du carbone = phase enzymatique = phase thermochimique = réactions sombres - Décrire : *la chaîne de transfert des électrons et la photophosphorylation acyclique *la photophosphorylation cyclique - Décrire les 3 étapes du cycle de Calvin Donner l'équation globale pour la production d'une molécule de glycéraldéhyde 3 phosphate
4- Transport et mise en réserve du produit glucidique de la photosynthèse	- Saccharose - Amidon
5- La voie à quatre carbones ou en C4	- Décrire le déroulement de la voie C4 - Séparation spatiale entre la voie en C4 et le cycle de Calvin - Anatomie de Kranz
6- Les plantes CAM	- Décrire le déroulement de la voie CAM - Séparation temporelle entre la voie en CAM et le cycle de Calvin
Avantages et inconvénients des trois mécanismes C3, C4 et CAM	- Faire un bilan énergétique des trois mécanismes
CHAPITRE VIII : METABOLISME DE L'AZOTE (3H)	
Introduction : L'analyse chimique des plantes montre que, du point de vue quantitatif, l'azote occupe le 4 ^{ème} rang parmi les éléments majeurs chez les végétaux, sa teneur est de 1 à 2% de la matière sèche. Du point de vue qualitatif, l'azote rentre dans la formation chimique de toutes les protéines et les acides nucléiques. Il intervient également dans la synthèse de la chlorophylle, des cytochromes et de plusieurs métabolites secondaires.	
1- Les sources d'azote	Il existe 4 sources d'azote : * L'azote atmosphérique N₂ * Plusieurs roches * Un procédé industriel * Les éclaires
2- Mobilité de l'azote	- Décrire le cycle de l'azote en mettant l'accent sur : - Les trois principales étapes :

2-1 le cycle de l'azote - a- L'ammonification - b- La nitrification - c- La dénitrification - d- Fixation de l'azote 2-2 Fixation symbiotique de l'azote 2-3 Fixation non symbiotique de l'azote 2-4 Les organismes symbiotiques 2-5 Les facteurs influençant la fixation symbiotique	* l'ammonification * la nitrification * l'assimilation Fixation symbiotique de l'azote RHIZOBIUM et BRADYRHIZOBIUM - Fixation non symbiotique de l'azote • Un procédé non photosynthétique : les clostridiums et les azotobacters. • Les voies métaboliques, 2 systèmes d'enzymes: la nitrogénase et l'hydrogénase. - Les organismes symbiotiques Décrire La séquence d'événements aboutissant à la formation d'une nodosité sur la racine d'une plante fixatrice d'azote - Les facteurs influençant la fixation symbiotique : *La forme d'azote *La température *Le pH *Les oligoéléments *Le rapport C/N :
3- Utilisation des nitrates, des sels ammoniacaux et autres sources d'azote pour les végétaux 3-1 Utilisation du nitrate 3-2 Les sels ammoniacaux 3-3 Utilisation de l'azote organique 3-4 Réduction du nitrate	L'azote sous forme nitrique ou ammoniacale constitue la source principale d'azote pour la plante. L'azote du sol peut provenir d'une fixation réalisée par les microorganismes sous forme nitrique ou bien des légumineuses (engrais vert). Il peut également être apporté par les fertilisants chimiques ou la matière organique.

Travaux Pratiques et Dirigés De Physiologie Végétale

15 h de travaux pratiques et dirigés (une note de TP)

TP N°1: Etude des caractéristiques hydriques d'un végétal : Mesure de la pression de succion.
TD N°1: Etude des caractéristiques hydriques d'un végétal : Mesure de la pression osmotique par la méthode cryoscopique.

TP N°2: Etude de la transpiration d'une plante par EXAO.
TD N°2 : Exercices sur la transpiration

TP N°3: Dosage de l'auxine
TD N°3: Les interactions entre les phytohormones

TP N°4: Etude de la respiration d'une plante par EXAO
TD N°4 : Exercices sur la respiration (Intensité et quotient respiratoires)

TP N°5: Etude de la photosynthèse par EXAO
TD N°5: Exercices sur la photosynthèse

Matériels nécessaires pour les TP de Physiologie Végétale

La liste du matériel suivant est nécessaire pour la réalisation des TP de Physiologie Végétale

TP Transpiration :

Dispositif EXAO avec hygromètre pour transpiration

TP Respiration :

Ordinateur et logiciel de traitement de données

Module oxymétrique

Sonde oxymétrique

Agitateur magnétique

TP Photosynthèse :

Ordinateur et logiciel de traitement de données

Module oxymétrique

Sonde oxymétrique

Agitateur magnétique

Sonde thermométrique

Sonde lux métrique

Lumière monochromatique

2 modules EXAO pour chaque type de mesure (transpiration, respiration, photosynthèse) et par salle de TP.

2 spectrophotomètres pour le dosage de l'auxine

Verrerie et produits chimiques

Classes préparatoires MP

Programme de mathématiques

Deuxième année

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE : Objectifs de formation	2
PROGRAMME D'ALGEBRE : PREMIER SEMESTRE	3
Structures algébriques usuelles (20 H)	3
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (48 H)	4
Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (12 H)	7
PROGRAMME D'ALGEBRE : DEUXIEME SEMESTRE	9
Équations différentielles linéaires (16 H)	9
Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens (36 H)	10
Calcul différentiel (24 H)	11
PROGRAMME D'ANALYSE : PREMIER SEMESTRE	14
Intégration sur un intervalle quelconque (18 H)	14
Séries numériques (10 H)	15
Topologie des espaces vectoriels normés (26 H)	16
Suites et séries de fonctions (30 H)	19
PROGRAMME D'ANALYSE : DEUXIEME SEMESTRE	21
Intégrales à paramètre (18 H)	21
Séries entières (12 H)	22
Familles sommables de nombres complexes (6 H)	23
Variables aléatoires discrètes (34 H)	24

INTRODUCTION GENERALE : Objectifs de formation

Le programme de mathématiques de deuxième année, dans le prolongement de celui de première année, est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie. Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.

Les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique bien conçue permet de développer :

- s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- modéliser : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- représenter : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- raisonner, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- calculer, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

L'étude de chaque domaine du programme (analyse et probabilités, algèbre et calcul différentiel) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

L'année est découpée en deux semestres. Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

PROGRAMME D'ALGEBRE : PREMIER SEMESTRE

Structures algébriques usuelles (20 H)

L'étude des structures algébriques permet d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire et de la géométrie des espaces euclidiens. Ce chapitre gagne à être illustré par de nombreux exemples.

Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique, mettant l'accent sur la notion d'idéal.

Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Groupes et sous-groupes

Groupe. Produit fini de groupes.
Sous-groupe. Caractérisation.
Intersection de sous-groupes.
Sous-groupe engendré par une partie.
Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.

b) Morphismes de groupes

Morphisme de groupes.
Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme.
Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.

Exemples : signature, déterminant.
Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.

Groupes monogènes et cycliques

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Groupe monogène, groupe cyclique.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Groupe des racines n -ièmes de l'unité.

Ordre d'un élément dans un groupe

Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G , alors, pour n dans $\mathbb{Z}$, on a $x^n = e \iff d|n$.
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x .

La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.

Anneaux

Anneau. Produit fini d'anneaux.
Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.
Anneau intègre. Corps. Sous-corps.

Les anneaux sont unitaires.

Les corps sont commutatifs.

Idéaux d'un anneau commutatif

Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.
Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.
Idéaux de $\mathbb{Z}$.

Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Indicatrice d'Euler φ . Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers.

Théorème d'Euler.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Application aux systèmes de congruences.

Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en première année.

Anneaux de polynômes à une indéterminée

Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Idéaux de $K[X]$.

PGCD de deux polynômes.

Relation de Bézout. Lemme de Gauss.

Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.

Par convention, le PGCD est unitaire.

Extension au cas d'une famille finie.

Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.

Algèbres

Algèbre.

Sous-algèbre.

Morphisme d'algèbres.

Les algèbres sont unitaires.

Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.**Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (48 H)**

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de première année et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Généralités

Matrices semblables, interprétation géométrique.

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.

Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.

En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F .

Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.

CONTENUS

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n .

Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v .

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

La notion de valeur spectrale est hors programme.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.

Deux matrices semblables ont même spectre.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{C}$.

Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique est unitaire.

Notations χ_u, χ_A .

Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.

La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ .

Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E .

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Cas des projecteurs, des symétries.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Interprétation géométrique.

La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n=2$ et à des cas particuliers simples pour $n=3$.

Traduction matricielle.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.

Si d est le degré du polynôme minimal de u , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Si P annule u , toute valeur propre de u est racine de P .

Théorème de Cayley-Hamilton.

Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M , sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le polynôme minimal est unitaire.

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda) x$.

Démonstration non exigible.

Lemme de décomposition des noyaux

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P , alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$

Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u , ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Traduction matricielle.

Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u , décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Traduction matricielle.

La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (12 H)

Ce chapitre poursuit trois objectifs :

- étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;
- préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.

Dans ce chapitre les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Dérivabilité en un point

Dérivabilité en un point.

Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1.

Interprétation cinématique.

Traduction par les coordonnées dans une base de E .

Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.

Opérations sur les fonctions dérivables

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire.

Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire.

Cas du produit scalaire.

Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.

Notations $\exp(a)$, e^a , $\exp(A)$, e^A .

Continuité de l'exponentielle.

Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.

Démonstration non exigible.

Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.

Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.

Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E .

Définie par les intégrales des coordonnées dans une base.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.

Inégalité $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.

Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en première année.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans E . Paramètre régulier.
Exemples simples d'arcs paramétrés plans.

Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier.
Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.
L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme.
La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme.

PROGRAMME D'ALGÈBRE : DEUXIÈME SEMESTRE

Équations différentielles linéaires (16 H)

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités	
Équation différentielle linéaire : $x' = a(t)x + b(t)$ où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I dans E . Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n .	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n . Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$. Pour t_0 dans I , l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E . Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n . Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.	Démonstration non exigible.
Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E .	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leq 3$.
Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

Équations différentielles scalaires du second ordre

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.

Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.

Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens (36 H)

L'objectif de ce chapitre est triple :

- consolider les acquis de première année concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens ;
- introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ;
- à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de première année relatives aux isométries et celles de deuxième année relatives à la réduction des endomorphismes.

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

La notion de forme quadratique est hors programme.

Rappels

Faire des rappels sans démonstrations des notions introduites en première année concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens .

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Caractérisation métrique du projeté orthogonal.

Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Inégalité de Bessel.

Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

Suite totale.

Si $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E , et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, alors, pour tout x de E , $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

Lien avec les matrices symétriques réelles.

La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.

Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E , alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u .

Interprétation matricielle de ce résultat.

La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.	Autre appellation : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Interprétation matricielle.

Calcul différentiel (24 H)

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v .	Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$ est autorisée.

Différentielle

Application différentiable au point a . Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a . Relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$.	Notations $df(a)$, $df(a) \cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω . Différentielle sur Ω . Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $df(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$.	Notation df .

Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f, g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.

Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t , si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u, v) , on ait $\|B(u, v)\| \leq C\|u\| \|v\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$.

Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m))$.

Cas des applications numériques

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a . Expression du gradient en base orthonormée.

Point critique d'une application différentiable.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.

Exemples de recherche d'extremums globaux.

Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade.

Notation $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Si X est une partie de E et x un point de X , un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X , tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.

Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E , si X est une ligne de niveau de f , alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x .

Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$: équation cartésienne.

Le théorème des fonctions implicites est hors programme.

Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω . L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans F , si γ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans Ω , si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Démonstration non exigible.

Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω .

Démonstration pour Ω convexe.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k .

Une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω .

Théorème de Schwarz.

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Notations $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}, \partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} f$.

La notion de différentielle seconde est hors programme.

Démonstration non exigible.

Démonstrations non exigibles.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication.

La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas attendu.

PROGRAMME D'ANALYSE : PREMIER SEMESTRE

Intégration sur un intervalle quelconque (18 H)

L'objectif de ce chapitre est multiple :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;
 - définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;
- Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

Linéarité de l'intégrale sur $[a, +\infty[$, positivité. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ », et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Si f est positive sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge

si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.

Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

- si $0 \leq f \leq g$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

Intégration sur un intervalle quelconque

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b[$ », et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».

Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a, b[$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ sur $[b, a[$.

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f \mapsto \int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge.

Relation de Chasles.

Espace des fonctions intégrables de I dans E .

Inégalité triangulaire.

Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt.$$

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.

Notation $\int_I f$.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

La fonction de référence est positive.

Séries numériques (10 H)

L'objectif de cette partie est de consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques.

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Compléments sur les séries numériques

Règle de d'Alembert.

Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.

Comparaison série-intégrale :

Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ converge.

Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.

L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.

Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone.

Interprétation géométrique.

La suite de référence est positive à partir d'un certain rang.

Cas des séries convergentes, des séries divergentes.

Produit de Cauchy de deux séries

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ de nombres complexes est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ avec :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}.$$

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ l'est aussi et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

Démonstration non exigible.

Topologie des espaces vectoriels normés (26 H)

Ce chapitre prolonge les notions de limites de suites et de fonctions étudiées en première année, et introduit la topologie des espaces vectoriels normés. Son objectif est multiple :

- introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;
- introduire la notion de compacité dans un espace vectoriel normé ;
- étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie, en particulier aux espaces de matrices
- donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires, suites et séries de fonctions).

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures.

Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.

Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Parties convexes d'un espace vectoriel réel.	
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\ \cdot \ _1$, $\ \cdot \ _2$, $\ \cdot \ _\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Comparaison des normes

Normes équivalentes.

Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.

Topologie d'un espace normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie.

Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.

Point intérieur, point adhérent.

Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.

Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A . Voisinage relatif.

Une boule ouverte est un ouvert.

Une boule fermée, une sphère, sont fermées.

Caractérisation séquentielle des fermés de A .

Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A .

Caractérisation séquentielle.

Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point.

Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les applications continues.

Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E .

Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$.

La notion de norme subordonnée est hors programme.

Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.
 Une partie compacte est fermée et bornée.
 Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.
 Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
 Produit d'une famille finie de compacts.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

Applications continues sur une partie compacte

Image d'une partie compacte par une application continue.
 Théorème de Heine.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.

Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

Chemin continu joignant deux points.

Relation d'équivalence associée sur une partie A de E .
 Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.

Parties connexes par arcs.

Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs.
 Cas des parties convexes, des parties étoilées.

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
 Image continue d'une partie connexe par arcs.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.
 Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.

Démonstration non exigible.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
 Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
 Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
 Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.
 Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Exemple : déterminant.

Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Sommes partielles. Convergence, divergence.

La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Somme et restes d'une série convergente.

En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Divergence grossière.

Lien suite-série.

La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.

Série absolument convergente.

Cas des séries matricielles.

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Le critère de Cauchy est hors programme.

Suites et séries de fonctions (30 H)

L'objectif de ce chapitre est triple :

- définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;
- étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;
- énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions

Convergence simple sur A .

Convergence uniforme sur A . La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.

Continuité, double limite

Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a , alors u est continue en a .

Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A .

Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A , et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n , u_n admet une limite ℓ_n en a , alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A .

Démonstration non exigible.

Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F , a un point de I . On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit

$$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$

Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I .

En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment S , alors :

$$\int_S u_n \rightarrow \int_S u.$$

Dérivation d'une suite de fonctions

Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F . Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u , et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v , alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I , u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $u' = v$.

Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I .

Séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme.

Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.

Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes ci-dessus : double limite, continuité, intégration et dérivation.

Approximation uniforme

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

Théorème de Weierstrass :

toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Démonstration non exigible.

Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n . Alors :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de f , imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème d'intégration terme à terme :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

PROGRAMME D'ANALYSE : DEUXIEME SEMESTRE

Intégrales à paramètre (18 H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs (par exemple intégrales eulériennes ou transformées intégrales).

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est définie et continue sur A .

L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A . Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A .

Dérivation d'une intégrale à paramètre

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que :

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J ;
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- hypothèse de domination : Il existe une fonction φ positive et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a sur I :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Démonstration non exigible.

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I .

Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de classe $\mathcal{C}^k$ de $f(\cdot, t)$ pour tout t de I , d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour tout x de J si $0 \leq j \leq k-1$ et de domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$.

Continuité et dérivabilité de g lorsque l'intervalle d'intégration J est un segment.

Extension aux dérivées d'ordres supérieurs.

Théorème de Fubini : lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $A \times [a, b]$, pour tout segment $[c, d]$ inclus dans A

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx.$$

Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.

g est continue sur I lorsque f est continue sur $I \times J$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est continue à dérivée partielle première par rapport à x continue sur $I \times J$.

Séries entières (12 H)

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;
- introduire la notion de développement d'une fonction en série entière ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Généralités

Série entière.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence d'une série entière.

Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.

La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$.

Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geq R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Utilisation de la règle de d'Alembert.

Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Série entière d'une variable réelle

Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n , $a_n = b_n$.

Fonctions développables en série entière, développements usuels

Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $] -r, r[$.

Développements de fonctions de variable réelle.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Familles sommables de nombres complexes (6 H)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire brièvement, exclusivement en vue de l'étude des probabilités, la notion de famille sommable de nombres complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Démonstrations non exigibles.

Démonstration non exigible.

Familles sommables

Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.

Théorème de sommation par paquets :

si $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si :

– Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable.

– La série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable

Somme d'une telle famille.

Lorsque $I = \mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum u_n$.

Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.

Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i \in F} u_i$ où F décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Démonstration hors programme.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ l'est.

Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.

Démonstration non exigible.

Démonstration hors programme.

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(|u_i|)_{i \in I}$.

Applications des familles sommables

La famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n , la série $\sum a_{m,n}$ converge et la

série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$ converge. Si tel est le cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors :

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(|a_{m,n}|)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$

Variables aléatoires discrètes (34 H)

Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé à minima. En particulier :

- la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;
- la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;
- les diverses notions de convergence des suites de variables aléatoires (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.

La notion de variable à densité est hors programme.

Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω .

On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

Événements.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω , une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application P définie sur $\mathcal{A}$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait :

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ s'identifie, via la formule

$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$

à une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.

Propriétés élémentaires des probabilités

Continuité croissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Continuité décroissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Propriétés presque sûres.

Tout développement sur ces notions est hors programme.

Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.

Notations $P_B(A)$, $P(A|B)$.

Variables aléatoires discrètes

Étant donné un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$. Loi P_X de la variable aléatoire X .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Notations $X \sim Y$, $X \sim \mathcal{L}$.

Notations $(X \geq x)$, $(X \leq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X .

Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.

Couple de variables aléatoires indépendantes.

Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Extension des résultats vus en première année.

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g , les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration non exigible.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.

La démonstration est hors programme.

Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Lois usuelles

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p .

Notation $\mathcal{G}(p)$.

CONTENUS

La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Caractérisation comme loi sans mémoire :

$$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$

Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ .

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n , $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ , alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p .

Notation $\mathcal{P}(\lambda)$.

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

Espérance

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(P(X = x) x)_{x \in X(\Omega)}$.

Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson. Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω .

Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(P(X = x) f(x))$ est sommable ; si tel est le cas :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

Inégalité de Markov.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors :

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

Notation $E(X)$.

Notation $E(X)$.
Variables centrées.

Si $|X| \leq Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Démonstration non exigible.

Variance, écart type et covariance

Moments.

Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$.

Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.

Variance, écart type.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Notations $V(X), \sigma(X)$.
Variables réduites.

Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Covariance de deux variables aléatoires.

Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes.

Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$, on a,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

où σ est la variance commune des X_k .

Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k.$$

Détermination de la loi de X par G_X . Utilisation de G_X pour calculer les moments de X .

La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X) = G_X'(1)$.

La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X .

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G_X'(1)$ et $G_X''(1)$.

Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Classes Préparatoires PC-PT
Programme de Mathématiques

Table des matières

Première Année	3
1 Mathématiques I : Première Année Semestre 1	4
Techniques fondamentales de calcul en analyse (20 H)	4
A-Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes	4
B-Primitives et équations différentielles linéaires	6
Nombres réels et suites numériques (15 H)	7
Limites, continuité, dérivabilité (20 H)	8
A- Limites-continuité	8
B-Dérivabilité	10
Analyse asymptotique(15 H)	11
2 Mathématiques I : Première Année Semestre2	13
Intégration(20 H)	13
Séries numériques(15 H)	14
Dénombrement(10 H)	15
Probabilités(25 H)	16
A-Généralités	16
B-Variables aléatoires sur un univers fini	17
3 Mathématiques II : Première Année Semestre 1	20
Nombres complexes, trigonométrie et calcul algébrique(12 H)	20
Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (8 H)	22
Vocabulaire ensembliste (10 H)	23
Systèmes linéaires et calcul matriciel (23 H)	23
A-Systèmes linéaires	23
B-Calcul matriciel	25
Polynômes et fractions rationnelles (20 H)	26
4 Mathématiques II : Première Année Semestre 2	27
Espaces vectoriels et applications linéaires (40 H)	27
A-Espaces vectoriels	27
B-Espaces de dimension finie	28
C-Applications linéaires	29
Matrices et déterminants (18 H)	30
A-Matrices	30
B-Déterminants	31
Produit scalaire et espaces euclidiens (12 H)	32
Deuxième Année	33
5 Mathématiques I : Deuxième Année Semestre 1	34
Intégration sur un intervalle quelconque (10 H)	34
Séries numériques (10 H)	35
Espaces vectoriels normés (20 H)	36
Suites et séries de fonctions (30 H)	37

6 Mathématiques I : Deuxième Année Semestre 2	40
Intégrales à paramètre (12 H)	40
Séries entières (10 H)	41
Probabilités (40H)	42
A-Espaces probabilisés	42
B-Variables aléatoires discrètes	44
7 Mathématiques II : Deuxième Année Semestre 1	47
Algèbre linéaire (45 H)	47
A-Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices	47
B-Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	48
Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (10 H)	49
Équations différentielles linéaires (15 H)	50
8 Mathématiques II : Deuxième Année Semestre 2	51
Espaces euclidiens (40 H)	51
Calcul différentiel (25 H)	52

Première Année

1 Mathématiques I : Première Année Semestre 1

Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du lycée, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux disciplines : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :

- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

Techniques fondamentales de calcul en analyse (20 H)

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en oeuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;
- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples.

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

A-Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
Intervalles de $\mathbb{R}$.	
Valeur absolue .Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $ x - a \leq b$.
Parties majorées, minorées, bornées.	
Majorant, minorant , maximum, minimum.	

Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Bijektivité, réciproque d'une bijection.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Graphes des fonctions $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x + a)$, $x \mapsto f(a - x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$.

Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x) = \lambda$ et $f(x) \geq \lambda$.

Interprétation géométrique de ces propriétés.

Graphes d'une réciproque.

Traduction géométrique de ces propriétés.

Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Dérivation

Équation de la tangente en un point.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Tableau de variation.

Dérivée d'une réciproque.

Dérivées d'ordre supérieur.

Ces résultats sont admis à ce stade.

À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.

Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.

Étude d'une fonction

Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.

Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.

Fonctions usuelles

Étude des fonctions exponentielle, cosinus et sinus hyperboliques, logarithme népérien, puissances.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Fonction logarithme décimal.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Fonctions sinus, cosinus, tangente.

Fonctions circulaires réciproques.

Dérivée, variation et graphe.

Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.

Notations $\ln$ et $\log_{10}$.

Notations Arcsin, Arccos, Arctan.

La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

Dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Dérivée de $\exp(\phi)$ où ϕ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie par ses parties réelle et imaginaire. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

B-Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.

Primitives des fonctions puissances, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme,

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$, où f est continue.

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.

Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Changement de variable : si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c},$$

et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Résultat admis à ce stade.

On définit à cette occasion la classe $\mathcal{C}^1$.

Application au calcul de primitives.

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.

Résolution d'une équation homogène.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction a est constante.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Résolution de l'équation homogène.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Équation homogène associée.

Si a et b sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$, avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$, $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques (15 H)

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels). On distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Ensembles de nombres usuels

Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels.
Droite réelle.
La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum.
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.
Partie entière.
Approximations décimales d'un réel.

La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.

Notation $[x]$.
Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous a et b dans X , on a $[a, b] \subset X$.

Généralités sur les suites réelles

Modes de définition d'une suite.
Monotonie. Suite majorée, minorée, bornée.

De façon explicite, implicite ou par récurrence.
Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
Exemples d'étude de la monotonie d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Suites stationnaires.
Suites arithmétiques, suites géométriques.

Les étudiants doivent connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.
La démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire.

Suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.

Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \rightarrow \ell$.
Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Lien avec la définition vue en classe de Terminale.
Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle en majorant $|u_n - \ell|$.

Unicité de la limite.

Notation $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Suite convergente, suite divergente.
Toute suite réelle convergente est bornée.
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Théorèmes d'existence d'une limite

Théorème de convergence par encadrement.
Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.

Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Théorème des suites adjacentes.

Suites extraites

Suites extraites d'une suite.

La notion de valeur d'adhérence est hors programme.

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.

Utilisation des suites extraites pour montrer la divergence d'une suite.

Suites complexes

Convergence d'une suite complexe.

Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée.

Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.

Limites, continuité, dérivabilité (20 H)

Cette partie est divisée en deux chapitres, consacrés aux limites et à la continuité pour le premier, au calcul différentiel pour le second.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles ou complexes.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $] -\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A- Limites-continuité

L'essentiel de cette partie consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, l'enseignant a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Unicité de la limite.

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f possède une limite finie en a , f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Notations $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a .

Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$.

Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a .

Adaptation des énoncés relatifs aux suites.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$).
Théorème de la limite monotone.

Démonstration non exigible.

Continuité en un point

Continuité de f en un point a de I .

La fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a .

Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en un point.

Si a est une extrémité de I n'appartenant pas à I , f admet une limite finie en a si et seulement si elle est prolongeable par continuité en a .

Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a .

Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.

Continuité sur un intervalle

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.

Théorème des valeurs intermédiaires.

La démonstration est hors programme.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

La démonstration est hors programme.

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f .

Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Limite de f en a , continuité de f en a , continuité de f sur un intervalle I .

Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Fonctions bornées au voisinage de a .

Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a .

Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en a , continues en a ou continues sur un intervalle I : combinaisons linéaires, produit, quotient.

B-Dérivabilité

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

Développement limité à l'ordre 1.

La dérivabilité entraîne la continuité.

Interprétation géométrique.

À ce stade, on peut écrire le reste sous la forme $(x-a)\varepsilon(x-a)$ et n'introduire la notation o que plus tard.

Tangente au graphe de f au point d'abscisse a .

Dérivabilité à droite, à gauche.

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables en un point, dérivables sur un intervalle : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.

Propriétés des fonctions dérivables

Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.

Théorème de Rolle.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par k , alors f est k -lipschitzienne.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

Interprétations géométrique.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion, elle n'appelle aucun développement supplémentaire.

Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Interprétation géométrique.

Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a .

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Formule de Taylor-Lagrange.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ».

Il convient de montrer par un contre-exemple que le théorème de Rolle ne s'étend pas.

Analyse asymptotique(15 H)

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Relations de comparaison : cas des suites

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.

Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

On caractérise ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^\beta(n)$, n^α , $e^{\gamma n}$.

Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.

Liens entre les relations de comparaison.

Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Relations de comparaison : cas des fonctions

Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents (en un point ou à l'infini).

Développements limités

Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I , développement limité d'ordre n au voisinage de a .

Adaptation au cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$.

Unicité des coefficients, troncature d'un développement limité.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.

Forme normalisée d'un développement limité :

Équivalence $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$; signe de f au voisinage de a .

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)),$$

avec $a_0 \neq 0$.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

La formule de Taylor-Young peut être admise à ce stade et justifiée dans le chapitre « Intégration ».

Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan , et de $\tan$ à l'ordre 3.

Applications des développements limités

Calcul d'équivalents et de limites.

Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum.

Détermination d'asymptotes.

2 Mathématiques I : Première Année Semestre 2

Le programme du deuxième semestre en analyse est organisé autour de deux objectifs :

- prolonger les chapitres d'analyse du premier semestre par l'étude de l'intégration sur un segment et des séries numériques, et achever ainsi la justification des résultats admis dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse » ;
- consolider les notions relatives aux probabilités sur un univers fini introduites au lycée et enrichir le corpus des connaissances sur les variables aléatoires définies sur un tel univers.

Intégration (20 H)

L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. On achève ainsi la justification des propriétés présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Ce chapitre permet de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral. Il peut également offrir l'occasion de revenir sur l'étude des équations différentielles rencontrées au premier semestre.

La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Fonctions continues par morceaux sur un segment

Subdivision d'un segment.

Fonctions en escalier définies sur un segment à valeurs réelles.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles.

L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Aucune construction n'est imposée.

Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ en terme d'aire mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.

Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique des sommes de Riemann.
Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Calcul intégral

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I et si x_0 est un point de I , alors $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en x_0 . Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.
Intégration par parties. Changement de variable.

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Application au calcul de primitives.
Tout excès de technicité est exclu.
Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des racines de fonctions homographiques ou de polynômes du second degré sont hors programme.

Formule de Taylor avec reste intégrale

Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n .
Inégalité de Taylor-Lagrange.

Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Linéarité, majoration du module de l'intégrale, intégration par parties et changement de variable, formule de Taylor avec reste intégral, Inégalité de Taylor-Lagrange.

Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Séries numériques(15 H)

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Analyse asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels.
L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue ; tout excès de technicité est exclu.

Généralités

Série à terme réel ou complexe, sommes partielles, convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.

La série est notée $\sum_{n \geq 0} u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Lien suite-série : Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Divergence grossière.

Séries à termes positifs

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n , la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Séries de Riemann.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est équivalente à celle

$$\sum_{n \geq 0} v_n.$$

Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Adaptation au cas où l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.

Application à l'étude de sommes partielles et de restes.

Séries absolument convergentes

Convergence absolue.

La convergence absolue implique la convergence.

Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.

La convergence de la série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$ est établie à partir de celles de $\sum_{n \geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n \geq 0} u_n^-$.

Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.

Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Représentation décimale des réels

Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel de $[0, 1[$.

La démonstration n'est pas exigible.

On indique la caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal à partir d'un certain rang.

Dénombrement(10 H)

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du premier paragraphe, les plus intuitives sont admises sans démonstration;
- l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas attendu du programme.

Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.

Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$.

Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cardinal de la réunion (disjointe ou quelconque) de deux ensembles finis.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

La formule du crible est hors programme.

Listes et combinaisons

Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .
Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Probabilités(25 H)

Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur le chapitre consacré au dénombrement.

Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

A-Généralités

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite au cas où les événements sont les parties de Ω .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Expérience aléatoire et univers

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.
Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement «A et B», événement «A ou B», événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

On se limite au cas où cet univers est fini.

Espaces probabilisés finis

Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Détermination d'une probabilité par les images des singletons.
Équiprobabilité ou probabilité uniforme.
Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω .

Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste.

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Formules de Bayes :

1. si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

2. si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors :

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.

Événements indépendants

Couple d'événements indépendants.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A|B) = P(A)$.

Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \dots, A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geq 3$.

B-Variables aléatoires sur un univers fini

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

Variables aléatoires

Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E . Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Loi P_X de la variable aléatoire X .

Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E , notation $X \in A$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$.

Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leq x)$.

L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.

Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.

Lois usuelles

Loi uniforme.

Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.

Notation $\mathcal{B}(p)$.

Interprétation : succès d'une expérience.

Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.

Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Notation $\mathcal{B}(n, p)$.

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.

Couples de variables aléatoires

Couple de variables aléatoires.

Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.

La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y) , les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y .

Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes.

Si X et Y sont indépendantes :

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Démonstration non exigible.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes.

Espérance

Espérance d'une variable aléatoire réelle.

Interprétation en terme de moyenne pondérée.

Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.

Relation : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega).$

Espérance d'une variable aléatoire réelle constante, de l'indicatrice d'une partie Ω , d'une variable aléatoire suivant l'une des lois uniforme, de Bernoulli, binomiale.

Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance.

Formule de transfert : Si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

Application au calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X .

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x).$$

Si X et Y sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La réciproque est fautive en général.

Variance et écart type

Variance, écart type.

La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3 Mathématiques II : Première Année Semestre 1

Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du lycée, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des nouvelles notions riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux disciplines : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :

- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

Nombres complexes, trigonométrie et calcul algébrique (12 H)

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises au secondaire. Le programme combine les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$, équations algébriques (équations du second degré, racines n -ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible. On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère ortho-normé direct.
Module	
Module. Relation $ z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Interprétation géométrique de $ z - z' $, cercles et disques.

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.

Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$.

Si t et t' sont deux réels, alors $e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'}$.

Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a \cdot \cos b$, $\sin a \cdot \cos b$, $\sin a \cdot \sin b$.

Fonction tangente.

Formule $\tan(a \pm b)$.

Formules d'Euler.

Formule de Moivre.

Notation $\mathbb{U}$.

Les étudiants doivent savoir retrouver les formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.

Factorisation de $1 \pm e^{it}$.

Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$.

Notation $\tan$.

Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

Arguments d'un nombre complexe non nul

Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.

Arguments d'un nombre complexe non nul. Arguments d'un produit, d'un quotient.

Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

Équations du second degré

Racines carrées d'un nombre complexe.

Résolution des équations du second degré, discriminant.

Somme et produit des racines d'une équation du second degré.

Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité.

Équation $z^n = a$.

Notation $\mathbb{U}_n$.

Représentation géométriques des solutions.

Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$.

Notations $\exp(z)$, e^z .

PC et SI : définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.

Exponentielle d'une somme.

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Interprétation géométrique des nombres complexes

Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.

Transformation $z \mapsto ze^{i\theta}$: rotation plane de centre O et d'angle θ .

Transformation $z \mapsto z + b$: interprétation en termes de translation.

Transformation $z \mapsto kz$: interprétation en termes d'homothétie.

Transformation $z \mapsto \bar{z}$: interprétation en termes de symétrie centrale.

Calcul algébrique : Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

Notations $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i \in I} a_i, \prod_{i=1}^n a_i, \prod_{i \in I} a_i$.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie de nombres complexes.

Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Sommes triangulaires.

Calcul algébrique : Coefficients binômiaux et formule du binôme

Factorielle. Coefficients binômiaux.

Notations $\binom{n}{p}$ et C_n^p .

Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule et triangle de Pascal.

Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.

Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (8 H)

Ce chapitre a pour objectif de consolider la connaissance des nombres entiers relatifs et de mettre en oeuvre des algorithmes élémentaires. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est supposé connu. Toute axiomatique de $\mathbb{Z}$ est hors programme.

Multiplés et diviseurs d'un entier relatif. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

PGCD de deux entiers relatifs non tout deux nuls.

PPCM.

Définition d'un nombre premier.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers.

Les démonstrations de l'existence et de l'unicité sont hors programme.

Vocabulaire ensembliste (10 H)

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Ensembles

Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie), ensemble vide.

Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire.

Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.

Ensemble des parties d'un ensemble.

Notations $E \setminus A$, $\overline{A}$ et $\mathbb{C}_E^A$ pour le complémentaire.

Notation $\mathcal{P}(E)$.

Applications et relations d'équivalence

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.

Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .

Notation $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E pour l'ensemble des applications de E dans F .

Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.

Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble fini.

Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.

Notation $\mathbb{1}_A$.

Restriction.

Notation $f|_A$.

Image directe.

Notation $f(A)$.

Image réciproque.

Notation $f^{-1}(B)$.

Composition.

Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.

Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Relation d'équivalence, classes d'équivalence.

Exemple : relation de congruence dans $\mathbb{Z}$

La notion d'ensemble quotient est hors programme.

Systèmes linéaires et calcul matriciel (23 H)

Ce chapitre est à concevoir comme une initiation aux structures algébriques et une préparation à l'algèbre linéaire " abstraite " qui sera étudiée au second semestre.

La problématique de départ est la résolution des systèmes linéaires. Elle est à la fois familière des étudiants - ils l'ont pratiquée dans l'enseignement secondaire pour de petites dimensions, par exemple en géométrie - et motivante par le nombre important de problèmes se ramenant à la résolution d'un système linéaire (méthode des différences finies, méthode des moindres carrés, etc). L'objectif majeur du sous-chapitre -Systèmes linéaires- est la justification et la mise en oeuvre de l'algorithme de Gauss-Jordan de résolution d'un système linéaire.

La recherche d'une méthode systématique de résolution d'un système linéaire par cet algorithme conduit naturellement au calcul matriciel qui recèle à la fois des propriétés inhabituelles pour les étudiants (existence de diviseurs de 0, non commutativité) et des propriétés analogues à celles des ensembles de nombres (distributivité, etc.) qu'il convient de mettre en évidence.

L'ordre d'exposition choisi ci-dessous n'est nullement impératif. On pourra aussi bien commencer par introduire le calcul matriciel puis l'appliquer à la théorie des systèmes linéaires. On veillera à respecter les objectifs de formation suivants :

- Familiariser les étudiants avec les différentes représentations des solutions d'un système linéaire.
- Entraîner au calcul matriciel. On évitera cependant tout excès de technicité et on se limitera à des systèmes et des matrices de taille raisonnable dans les applications numériques.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n et p appartiennent à $\mathbb{N}$.

A-Systèmes linéaires

Généralités sur les systèmes linéaires

Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Système homogène associé à un système linéaire.
Matrice A d'un système linéaire.

Opérations élémentaires : échange des lignes L_i et L_j , ajout de λL_j à L_i pour $i \neq j$ et multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$.

Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Deux matrices sont dites équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Si l'on passe d'un système S à un autre système S' par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de S' s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de S .

Interprétations géométriques : représentation d'une droite, d'un plan.

On introduit les matrices comme tableaux rectangulaires d'éléments de K .

Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Notation $A \underset{L}{\sim} A'$

Ce résultat justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.

Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi,
- À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle. Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Un schéma "en escalier" illustre la notion de matrice échelonnée.

La démonstration de l'unicité n'est pas exigible.

Pour des systèmes de taille $n > 3$ ou $p > 3$, on utilise l'outil informatique. On met en évidence sur un exemple l'instabilité numérique de la méthode due aux erreurs d'arrondis.

Ensemble des solutions d'un système linéaire

Inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres.

Système incompatible. Système compatible.

Rang d'un système linéaire.

Le nombre de paramètres est égal à la différence du nombre d'inconnues et du rang.

Expression des solutions d'un système linéaire.

Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.

Le rang est défini comme nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associé.

Description des solutions au moyen d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.

B-Calcul matriciel

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Ensembles de matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Opérations sur les matrices : combinaison linéaire, multiplication matricielle.

Application à l'écriture matricielle d'un système linéaire.

Propriétés des opérations matricielles.

Ensemble $\mathcal{M}_n(K)$.

Puissances d'une matrice carrée.

Formule du binôme.

Matrices diagonales, triangulaires.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .

La j -ème colonne de AB est le produit de A par la j -ème colonne de B et la i -ème ligne de AB est le produit de la i -ème ligne de A par B .

Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul.

Notation I_n pour la matrice identité.

Le produit matriciel n'est pas commutatif.

Stabilité par les opérations.

Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

Matrices élémentaires : matrices de transvection, de transposition et de dilatation.

Inversibilité des matrices élémentaires.

Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$.

Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires.

Notation $A \underset{C}{\sim} A'$.

Matrices carrées inversibles

Matrices carrées inversibles. Inverse.

Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, équivalence des propriétés suivantes :

- A est inversible ;
- $A \underset{L}{\sim} I_n$;
- Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ;
- Pour tout B , le système $AX = B$ admet une unique solution ;
- Pour tout B , le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

On introduit la terminologie "groupe linéaire", et la notation $GL_n(\mathbb{K})$, pour désigner l'ensemble des matrices inversibles de taille n , mais tout développement sur la notion de groupe est hors programme.

Transposition

Transposée d'une matrice.

Transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse.

Notation ${}^t A$.

Matrices symétriques et antisymétriques.

Polynômes et fractions rationnelles (20 H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de base des objets formels (polynômes) et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.
Opérations : somme, produit, composée.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.
Degré d'une somme, d'un produit.
Fonction polynômiale associée à un polynôme.

La construction n'est pas exigible.
Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.
Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs et multiples.
Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Dérivée formelle d'un polynôme.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit.
Formule de Taylor polynômiale.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynômiale associée.

Racines

Racines (ou zéros) d'un polynôme.
Caractérisation par la divisibilité.
Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .
Multiplicité d'une racine.
Caractérisation par les dérivées successives.
Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.
Cas des polynômes du second degré.

Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.
Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

Fractions rationnelles

Définition d'une fraction rationnelle, forme irréductible partie entière, pôle et multiplicité.
Exemples de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de la décomposition en éléments simples, dans sa forme générale, est hors programme.
On limitera la technicité des exercices.

4 Mathématiques II : Première Année Semestre 2

Le programme du deuxième semestre en algèbre a pour objectif d'introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Le programme d'algèbre linéaire est divisé en deux chapitres d'importance comparable, intitulés « Algèbre linéaire I » et « Algèbre linéaire II ». Le premier privilégie les objets géométriques : espaces, sous-espaces, applications linéaires. Le second est consacré aux matrices. Cette séparation est une commodité de rédaction. L'enseignant a la liberté d'organiser l'enseignement de l'algèbre linéaire de la manière qu'il estime la mieux adaptée.

Espaces vectoriels et applications linéaires (40 H)

Les objectifs du chapitre « Espaces vectoriels et applications linéaires » sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;
- reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; il convient d'insister sur les méthodes de calcul de dimension, de faire apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;
- présenter un certain nombre de notions de géométrie affine, de manière à consolider et enrichir les acquis relatifs à la partie affine de la géométrie classique du plan et de l'espace.

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

A-Espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces et sous espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$.	On pourra introduire la notion d'espace vectoriel sur des exemples simples : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, caractérisation.	Exemples : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels. Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection Sous-espaces supplémentaires.	
Familles finies de vecteurs	
Familles libres, liées.	Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires. Vecteurs linéairement indépendants.
Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre. Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est dite de degrés échelonnés si $\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$.

Base, coordonnées d'un vecteur dans une base.
 Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 Base adaptée à une somme directe.
 Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

Matrice colonne des coordonnées.

B-Espaces de dimension finie

Dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
 Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul E , on peut extraire une base de E .
 Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.
 Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base.
 Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.
 Dimensions.
 Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
 Si E est dimension n et F est une famille de n vecteurs de E , alors F est une base de E si et seulement si F est libre, si et seulement si F est génératrice de E .
 Rang d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.
 Caractérisation des familles finies libres par le rang.

Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Droites et plans vectoriels.

Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
 Supplémentaires d'un sous-espace : existence, dimension commune, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
 Dimension de la somme de deux sous-espaces (formule de Grassmann).

C-Applications linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Généralités

Applications linéaires, endomorphismes.
Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée.
Image directe d'un sous-espace vectoriel.
Image et noyau.
Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.

Notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$.

Isomorphismes

Isomorphismes, automorphismes.
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.
Caractérisation des isomorphismes par les bases.
Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.
Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Le groupe linéaire $GL(E)$.

Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base.
Cas particulier des endomorphismes.

Modes de définition d'une application linéaire

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Identité et homothéties.
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.
Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = id_E$.

Notation Id_E .

Rang d'une application linéaire

Applications linéaires de rang fini.
Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.
Théorème du rang : si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et

$\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u).$$

Équations linéaires

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux.
La notion de sous-espace affine est hors programme.

Matrices et déterminants (18 H)

Cette dernière partie du programme d'algèbre linéaire fait le lien entre la représentation géométrique (espaces vectoriels et applications linéaires) et la représentation numérique (matrices) dans le cadre de la dimension finie. Bien que naturellement liées à l'algorithme de Gauss-Jordan et aux changements de bases, les notions d'équivalence et de similitude matricielles ne sont pas au programme. D'une manière générale, les problématiques de classification géométrique des endomorphismes sont hors programme.

Dans un premier sous-chapitre intitulé "Matrices", on expose la représentation matricielle des applications linéaires en dimension finie au moyen de bases. Il en résulte une correspondance entre les registres géométriques et numériques. L'aspect numérique de la théorie présente l'avantage de fournir une résolution algorithmique à des problèmes linéaires ayant un nombre fini de degrés de liberté issus de la géométrie ou de l'analyse.

Le second sous-chapitre intitulé "Déterminants" développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence ses aspects algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et géométrique (volume orienté).

Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux registres (géométrique et numérique), qu'ils sachent représenter numériquement un problème géométrique à l'aide de bases adaptées et interpréter géométriquement un problème numérique.

Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A-Matrices

Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.

Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée.

Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Noyau, image et rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Image et noyau d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Rang d'une matrice A .

Interprétation en termes de systèmes linéaires.

Le rang d'une matrice est défini comme le rang du système de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire canoniquement associée à A .

Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Théorème du rang.

Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.

Rang de la transposée.

Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice.

B-Déterminants

On motive les propriétés définissant un déterminant par celles de l'aire et du volume algébriques.

La théorie au programme évite le recours au groupe symétrique et limite l'intervention des formes multilinéaires. On commence par définir le déterminant d'une matrice carrée. La notion de matrice réduite échelonnée par colonnes et la décomposition résultant de l'algorithme de Gauss-Jordan appliqué aux colonnes d'une matrice carrée suffisent à démontrer les propriétés du déterminant sur $M_n(\mathbb{K})$.

On définit ensuite le déterminant d'un endomorphisme. Tout excès de technicité est exclu.

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

Dans ce sous-chapitre, n est supérieur ou égal à deux et E désigne un espace vectoriel de dimension finie n .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Déterminant d'une matrice carrée de taille n

Il existe une unique application $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
- f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
- $f(I_n) = 1$.

La démonstration de ce théorème pour $n \geq 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. On motivera géométriquement cette définition pour $n \in \{2, 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques. On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{K})$.

Propriétés du déterminant

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ pour tout $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times M_n(\mathbb{K})$.

Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant.

Applications : calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.

Déterminant d'un produit de matrices carrées, déterminant de l'inverse.

Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.

Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.

Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.

La formule de changement de bases est hors programme.

Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.

Démonstration non exigible.

La comatrice est hors programme.

Déterminant d'un endomorphisme

Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

Produit scalaire et espaces euclidiens (12 H)

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension 2 ou 3 pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait ;
- le théorème de projection orthogonale et l'existence de la meilleure approximation quadratique.

On s'appuie sur des exemples de géométrie du plan et de l'espace pour illustrer les différentes notions.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Produit scalaire

Produit scalaire.
Espace préhilbertien, espace euclidien.

Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$.
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,
produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f g$ sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire.
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Les étudiants doivent savoir développer $\|u \pm v\|^2$.
Cas particuliers : Produit scalaire canonique et produit
scalaire $(f|g) = \int_a^b f g$ sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Séparation, homogénéité, inégalité triangulaire (cas d'égalité).

Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
Familles orthogonales, orthonormées (ou orthonormales).
Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls.
Théorème de Pythagore.
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Bases orthonormées d'un espace euclidien

Existence de bases orthonormées.
Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.
Expressions du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace V de dimension finie. Projecteur orthogonal P_V .

Les étudiants doivent savoir déterminer $P_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de V ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - P_V(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de V .

Inégalité de Bessel : pour tout $x \in E$, $\|P_V(x)\| \leq \|x\|$.
 $P_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V tel que

La distance de x à V , notée $d(x, V)$, est égale à ce minimum.

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

Supplémentaire orthogonal d'un sous espace vectoriel V de dimension finie. En dimension finie, dimension de $V^\perp$.

Deuxième Année

5 Mathématiques I : Deuxième Année Semestre 1

Intégration sur un intervalle quelconque (10 H)

L'objectif de ce chapitre est multiple :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;
 - définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;
- Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ cette limite.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Intégrale divergente.

b) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.

Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$, $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$.

Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable :

si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\int_a^b (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t) dt$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt.$$

Notation $\int_a^b f(t) dt$.

Les étudiants doivent connaître la nature de $\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ selon le signe de α .

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

c) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).

Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.

Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

- si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, +\infty[$.
- si $f(x) = O(g(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a, +\infty[$.
- si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a, +\infty[$.

Si f est continue et intégrable sur I , alors $\int_I |f(t)| dt = 0$ implique $f = 0$.

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I .

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I .

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour une fonction à valeurs réelles, on utilise ses parties positive et négative.

Notations $\int_I f(t) dt, \int_I f$.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Produit scalaire de deux fonctions continues de carré intégrable sur I à valeurs réelles.

Séries numériques (10 H)

Cette partie consolide et élargit les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.

La semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

a) Compléments sur les séries à valeurs réelles

Théorème de comparaison entre une série et une intégrale : si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, positive et décroissante alors la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$

converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Formule de Stirling : équivalent de $n!$.

Règle de d'Alembert.

Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.

Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone.

Démonstration non exigible.

La transformation d'Abel est hors programme.

b) Produit de Cauchy de deux séries

Le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ de nombres complexes est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ avec :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p.$$

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ l'est aussi et on a :

Démonstration non exigible.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

Espaces vectoriels normés (20 H)

Ce chapitre vise les objectifs suivants :

- généraliser au cas des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;
- préparer l'introduction de la norme de la convergence uniforme, afin de fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.

L'aspect géométrique de certains concepts topologiques gagne à être illustré par de nombreuses figures.

a) Normes sur un espace vectoriel normé

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé.

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

Norme associée à un produit scalaire.

Distance associée à une norme.

Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

Parties convexes.

Convexité des boules.

Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.

b) Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Convergence d'une suite.

Exemples de suites de matrices.

Une suite convergente est bornée.

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

Résultat admis, qui pourra être illustré sur les normes usuelles définies sur $\mathbb{K}^p$.

L'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base.

d) Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie

L'étude topologique d'un espace vectoriel normé de dimension finie se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme.

Résultat admis.

Point intérieur à une partie.

Partie ouverte.

Une boule ouverte est un ouvert.

Point adhérent à une partie.

Caractérisation séquentielle.

Partie fermée.

Une boule fermée, une sphère sont des fermés.

Intérieur, adhérence, frontière.

Seules les définitions sont au programme. Ces notions sont illustrées par des figures.

e) Limite et continuité en un point

Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.

Caractérisation séquentielle.

Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée.

Opérations algébriques sur les limites, composition.

Continuité en un point. Lien avec la continuité des composantes.

Caractérisation séquentielle.

f) Continuité sur une partie

Opérations algébriques, composition.

Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.

Démonstration non exigible.

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.

Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.

La notion de norme subordonnée est hors programme.

Continuité des applications multilinéaires et polynômes sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple du déterminant.

Suites et séries de fonctions (30 H)

L'objectif de ce chapitre est multiple :

- définir les modes usuels de convergence d'une suite et d'une série de fonctions et de les exploiter pour étudier la stabilité des propriétés de ces fonctions par passage à la limite. En prolongement du chapitre sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, un lien est établi avec l'utilisation de la norme de la convergence uniforme.
- compléter le chapitre dédié à la notion d'intégrabilité par le théorème de la convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme ;

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions.

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.

Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, les étudiants doivent savoir utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que pour tout n , $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$.

La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

b) Double limite

Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de I dans F convergeant uniformément vers u sur I , et soit a un point adhérent à I ; si, pour tout n , u_n admet une limite l_n en a , alors (l_n) admet une limite l et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$.

Démonstration hors programme.

Adaptation aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

c) Régularité de la limite d'une suite de fonctions

Continuité de la limite d'une suite de fonctions :

si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si, pour tout n , f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Interversion limite-intégrale :

si une suite (f_n) de fonctions continues converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions :

si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers h , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leq j \leq k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur tout segment de I .

d) Régularité de la somme d'une série de fonctions

Adaptation au cas des séries de fonctions du théorème de la double limite énoncés ci-dessus.

Continuité de la somme :

si $\sum f_n$ converge uniformément sur I et si, pour tout n , f_n est continue sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Intégration terme à terme d'une série de fonctions :

soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors la série des intégrales est convergente et on a :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions :

soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série

$\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de

classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Adaptation au cas où la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Les étudiants peuvent appliquer directement un théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme.

e) Suites et séries de fonctions intégrables

Théorème de convergence dominée :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n , alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) dt.$$

Théorème d'intégration terme à terme :

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de f , imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Démonstration hors programme.

L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

6 Mathématiques I : Deuxième Année Semestre 2

Intégrales à paramètre (12 H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cas d'un intervalle quelconque

Théorème de continuité :

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe une fonction φ positive et intégrable (en particulier, continue par morceaux) sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Théorème de dérivation : Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$, telle que :

- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J ;
- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J ;
- hypothèse de domination : Il existe une fonction φ positive et intégrable sur J , telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a sur I :

$$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Conséquence 1 : (Cas d'un segment) Continuité et dérivabilité de g lorsque l'intervalle d'intégration J est un segment et f est continue à dérivée partielle première par rapport à x continue sur $I \times J$.)

Démonstration non exigible.

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I .

Démonstration non exigible.

Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I .

Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse d'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ pour tout x de I si $0 \leq j \leq k-1$ et de domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$.

Conséquence 2 : (Formule de Fubini) Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $A \times [a, b]$, pour tout segment $[c, d]$ inclus dans A

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx.$$

Séries entières (10 H)

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;
- étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

La théorie des séries entières sera appliquée au cas des séries génératrices dans le chapitre dédié aux variables aléatoires discrètes et à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

a) Rayon de convergence

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels positifs ρ tels que la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée.

Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.

Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors :

si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;

si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Utilisation de la règle de d'Alembert (pour les séries numériques).

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

b) Régularité de la somme

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

On admet la continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.

Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière.
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Unicité du développement en série entière.
Développements des fonctions usuelles.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Les étudiants doivent savoir utiliser une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.
Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la résolution des équations différentielles.

Probabilités (40H)

Les chapitres de probabilités permettent de développer les compétences suivantes :

- modéliser des situations aléatoires par le choix d'un espace probabilisé ou de variables aléatoires adéquats ;
- maîtriser un formalisme spécifique aux probabilités.

A-Espaces probabilisés

Cette partie a pour objectif la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret. Cette mise en place se veut minimale. En particulier :

- la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;
- la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.

a) Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensembles finis ou dénombrables.
Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.

Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.
Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

b) Espace probabilisé

Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
- pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω , on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- i. $P(\Omega) = 1$,
- ii. pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Propriétés :

- $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- Continuité croissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n , on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

- Continuité décroissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n , on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

- Sous additivité : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule des probabilités composées.

Système complet dénombrable d'événements.

Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B | A_n) P(A_n)$$

Formule de Bayes.

Indépendance de deux événements.

Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

Notation $P_B(A) = P(A | B)$. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus en première année dans le cadre des univers finis.

On adopte la convention $P(B | A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.

La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A | B) = P(A)$.

L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geq 3$.

B-Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable ;
- fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret ;
- exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres ;
- introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.

Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$.

Loi d'une variable aléatoire discrète.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Si X prend ses valeurs dans $\{x_n ; n \geq 0\}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant

$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle

que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe et lois marginales

Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g , les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Variables mutuellement indépendantes.

Suite de variables aléatoires indépendantes (deux à deux ou mutuellement).

Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.

$F_X(x) = P(X \leq x)$. L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.

Démonstration hors programme.

Extension aux variables discrètes des notions étudiées en première année sur les variables finies.

Démonstration hors programme.

Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vus en première année.

La démonstration de l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois discrètes données est hors programme.

Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

b) Espérance et variance

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n; n \geq 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente; si tel est le cas, on appelle espérance de X , noté $E(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ de X , alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) f(x_n).$$

Linéarité de l'espérance.

Positivité, croissance de l'espérance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.

Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$.

Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, égalité $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.

Covariance, coefficient de corrélation.

Encadrement $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération.

Démonstration hors programme.

Démonstration non exigible.

Démonstration hors programme.

Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.

Notations : $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n.$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.

La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $E(X) = G'_X(1)$.

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X .

Démonstration non exigible.

Démonstration non exigible.

Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $V(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.

d) Lois usuelles

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Série génératrice, espérance et variance.

Caractérisation comme loi sans mémoire :

$$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$

Loi de Poisson de paramètre λ . Série génératrice, espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

e) Résultats asymptotiques

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n , $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

La notion de convergence en loi est hors programme.

Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

7 Mathématiques II : Deuxième Année Semestre 1

Algèbre linéaire (45 H)

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A-Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année ;
- étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace ;
- passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Produit et somme d'espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires.

Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.

b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v .

Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

c) Déterminants

Exemples de déterminants.

Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

d) Matrices semblables et trace

Matrices semblables.

La notion de matrices équivalentes est hors programme.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

B-Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de diagonalisabilité d'une matrice carrée.

L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires, dont la résolution repose sur des outils similaires.

La notion de polynôme annulateur est hors programme. L'étude des classes de similitude est hors programme.

a) Éléments propres

Droite stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E .

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.

Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.

Multiplicité d'une valeur propre.

Majoration de la dimension d'un sous-espace propre.

Les étudiants doivent savoir que si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Notation $\text{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.

Par convention le polynôme caractéristique est unitaire.

Notations χ_A, χ_u .

Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.

b) Diagonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.

Un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Exemple des projecteurs et des symétries.

Interprétation matricielle de ces résultats.

CONTENUS

Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre p à coefficients constants lorsque l'équation caractéristique admet p racines distinctes.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.

c) Trigonalisation en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$.

En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démonstration non exigible.

Interprétation matricielle de ce résultat.

La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (10 H)

L'objectif de ce chapitre est double :

- généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles ;
- formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Dérivabilité en un point.

Dérivabilité sur un intervalle.

Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un.

Interprétations géométrique et cinématique.

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivée de $L \circ f$, $B(f, g)$, $f \circ \varphi$ où f et g sont dérivables et à valeurs vectorielles, L est linéaire, B est bilinéaire, φ est dérivable et à valeurs réelles.

Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de $\mathbb{R}^2$ de deux fonctions vectorielles.

b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Brève extension des résultats du paragraphe précédent.

c) Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Point régulier, tangente en un point régulier.

Construction d'arcs plans.

L'étude des points stationnaires, des asymptotes et des arcs définis en coordonnées polaires est hors programme.

Équations différentielles linéaires (15 H)

L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres un et deux, abordée en première année, se poursuit par celle des systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 et des équations scalaires à coefficients non constants, en mettant l'accent sur les équations d'ordre deux. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :

- la forme des solutions ;
- le théorème de Cauchy linéaire ;
- le lien entre les équations scalaires et les systèmes différentiels d'ordre un ;
- la résolution explicite.

Ce chapitre favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Systèmes différentiels

Équation de la forme $X' = A(t)X + B(t)$ où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'espace vectoriel des solutions de $X' = A(t)X$.

Démonstration hors programme.

Dimension de l'espace vectoriel des solutions.

Système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$.

Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable.

Exemples de résolution dans le cas où A est trigonalisable.

b) Équations différentielles linéaires scalaires

Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension.

Cas des équations à coefficients constants.

Les étudiants doivent savoir écrire cette équation sous la forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$.

La recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications.

On relie les résultats obtenus en première année à l'aide de l'équation caractéristique à la réduction de la matrice du système différentiel associé.

Les étudiants doivent savoir trouver une solution particulière de l'équation complète pour un second membre de la forme $A \cos(\omega t)$ ou $A \sin(\omega t)$.

La méthode de la variation des constantes est hors programme.

8 Mathématiques II : Deuxième Année Semestre 2

Espaces euclidiens (40 H)

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces euclidiens ;
- étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les classer en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;
- énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale. Groupe orthogonal. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Exemple des réflexions en dimensions deux et trois. Notation $O(E)$.
b) Matrices orthogonales	
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle. Caractérisation par l'une des relations $MM^T = I_n$ ou $M^T M = I_n$. Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale. Groupe orthogonal d'ordre n . Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Orientation d'un espace euclidien.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale. Interprétation en termes de colonnes et de lignes. Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$. Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Détermination des matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$. Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$. Écriture complexe d'une rotation.

d) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles

Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E , alors u est symétrique si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Théorème spectral : un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A , il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Démonstration non exigible.

Calcul différentiel (25 H)

L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, ce chapitre privilégie l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Il est axé sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie : résolution d'équations aux dérivées partielles, problèmes d'extremums, courbes, surfaces. On se limite en pratique au cas $p \leq 3$.

a) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une fonction est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur U .

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1.

Différentielle de f en a .

Notations $\partial_i f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Démonstration non exigible.

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U .

Elle est définie comme l'application linéaire $df(a)$ de $\mathbb{R}^p$

dans $\mathbb{R} : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \partial_i f(a)$.

Notation $df(a) \cdot h$.

b) Règle de la chaîne

Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.

Application au calcul des dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.

Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.

c) Gradient

Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Relation $\forall h \in \mathbb{R}^p, df(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h)$.

Le gradient est défini par ses coordonnées.

Notation $\nabla f(a)$.

d) Applications géométriques

Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

CONTENUS

Équation de la tangente en un point régulier.

En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

Courbes tracées sur une surface.

Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

On admet l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathcal{C}^1$.

Cas particulier des courbes coordonnées d'une surface d'équation $z = g(x, y)$.

Tangentes aux courbes régulières de classe $\mathcal{C}^1$ tracées sur la surface.

e) Dérivées partielles d'ordre deux

Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction de deux ou trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Théorème de Schwarz (cas de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$).

Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Notations $\partial_{i,j}^2 f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Démonstration hors programme.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ atteint un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.

Recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$.

Pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$: formule de Taylor-Young; étude de l'existence d'un extremum local en un point critique ou $r^2 - s^2 \neq 0$.

- Rapport Final -

NOUVELLE REFORME DES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT EN CLASSES PREPARATOIRES COMPTE RENDU DE L'ATELIER D'INFORMATIQUE

Résumé

C'est dans le cadre de la nouvelle réforme des programmes d'enseignement en classes préparatoires, qu'a été établi ce document.

Il s'agit ici de résumer l'ensemble des discussions entre enseignants d'informatique réunis lors d'un atelier national de réflexion sur le programme d'informatique enseigné aux élèves des classes préparatoires. Cet atelier, auquel nous a invité le ministère de l'enseignement supérieur à travers la Direction Générale des Etudes Technologiques, a permis de faire réunir plusieurs enseignants d'informatique afin de consolider les pratiques d'échanges pédagogiques et initier une collaboration mutuelle entre collègues. C'était également une occasion pour mettre à terme la proposition d'un nouveau programme d'enseignement d'informatique en classes préparatoires.

Dans ce document nous présentons une réflexion concrète à l'évaluation des progressions pédagogiques actuelles. Cette réflexion, qui est le fruit de plusieurs réunions des membres du comité, sera à la base d'une proposition d'une réforme et d'une amélioration des méthodes pédagogiques. Ceci est dans le but de contribuer à une formation à l'internationale des futurs ingénieurs tunisiens.

En fait, la démarche pédagogique adoptée actuellement pour l'enseignement de l'informatique en classes préparatoires a montré plusieurs anomalies dont les principales sont :

- Le système d'évaluation trimestriel a montré ses limites vue le nombre important d'évaluations effectuées (1 évaluation toutes les 5-6 semaines). Ceci provoque plusieurs interruptions des cours et une lourde charge d'organisation administrative.
- Le nombre d'heures attribuées à l'enseignement de l'informatique est très faible (2 heures par semaine en première année et 2 heures par quinzaine en deuxième année). En conséquence, l'étudiant assimile très peu la matière et ne lui accorde pas d'intérêt.
- Le coefficient affecté à l'informatique est également faible, voire minuscule, par rapport aux autres matières scientifiques telles que les mathématiques, les sciences physiques et la chimie. Pour cette raison, les étudiants ont montré la nonchalance vis-à-vis de la matière et le désintéressement total bien que c'est important pour un étudiant, futur ingénieur, d'ancrer en lui les réflexes logiques et optimaux enseignés en informatique.
- A l'ère du numérique, l'outil informatique formel (Maple) enseigné actuellement en classes préparatoires s'est avéré inapproprié (inadéquat). Cet outil a montré ses limites en programmation avancée. Il est donc temps de le remplacer si nous visons l'internationale.
- Les débouchés des étudiants de la filière BG est différent des autres filières (MP, PC et Technologie). Il est donc nécessaire d'établir un programme spécifique pour cette filière.
- Plusieurs institutions préparatoires souffrent d'un manque de matériels. Dans certain cas, les étudiants n'ont pas eu la chance de faire des travaux pratiques durant une année entière. Dans d'autres institutions les séances de travaux pratiques (TPs) n'ont pas eu lieu dans les meilleures conditions (trois voire quatre étudiants par machine).

Suite à ces constatations, plusieurs recommandations peuvent être soulevées:

- Mettre en place un système d'évaluation semestriel au lieu d'un système trimestriel.
- Accorder deux heures hebdomadaires en première année sous forme de cours intégré (1 heure de cours / 1 heure de TD)
- Augmenter le nombre d'heures d'enseignement en deuxième année. Nous recommandons de passer de deux heures par quinzaine à deux heures par semaine en cours intégré (une heure de cours et une heure de TD).
- L'enseignement doit être effectué en laboratoire informatique par groupe de 25 étudiants max, afin d'offrir la possibilité à l'étudiant de maîtriser à fond l'outil informatique.
- Le coefficient de l'informatique doit passer au moins à 6 au lieu de 3 afin d'obliger l'étudiant à donner plus d'importance à la matière.
- Proposer un programme spécifique pour la filière BG.
- Améliorer les conditions de travail dans plusieurs institutions.
- Prévoir des formations pour les formateurs, sous forme d'école d'été ou de stage de formation.

Comme action à moyen et long terme nous proposons la création d'un comité pédagogique de pilotage mixte et de suivi des statistiques faisant interface entre les niveaux secondaires / préparatoires /écoles d'ingénieurs. Ce comité aura pour mission d'auditer et d'établir des rapports sur la conduite du système et de transmettre les attentes des acteurs pédagogiques.

Programme proposé et conditions de mise en œuvre

Nous présentons dans ce qui suit, le programme élaboré suite à plusieurs réunions de travail de la commission de réforme du programme de l'enseignement de l'informatique en classes préparatoires.

Ce programme ne peut être concrétisé que si et seulement si :

- Un accord favorable lui est discerné de la part du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique.
- Une prise en considération de toutes les recommandations sus-indiquées.

Programme de la première Année

Filière MP/ PC/PT

Ce programme a été élaboré, sur la base du contenu et non pas sur la répartition des séances.

L'objectif de la formation

- L'étudiant doit maîtriser le langage Python,
- Les contrôles et examens doivent être effectués en langage Python

SEMESTRE I

Titre des chapitres & contenu		Charge Horaire Approximative
PARTIE I (6 h) Introduction Générale	Chapitre I : Architecture matérielle et logicielle 1. Architecture d'un ordinateur Mémoires. Microprocesseur. Périphériques. Canal de communication (bus). Démonstration / Démontage d'un PC de bureau (repérage et changements de certains composants, etc.). 2. Les systèmes d'exploitation Notion de système d'exploitation (avec des exemples de systèmes). Le multi tâche. Identification des utilisateurs et contrôle d'accès. Système de fichiers.	2h
	Chapitre II : Système de numération 1. Représentation des nombres (naturels, relatifs et réels) dans une base b (binaire, octale, Hexadécimale ...). 2. Transcodage : Passage d'une base à l'autre.	4h

	3. Opérations élémentaires sur les nombres binaires. 4. Limites de la représentation (erreurs d'arrondi et de débordement de mémoire). <u>Travaux Dirigés :</u> Représentation des nombres dans une base b. Passage d'une base à l'autre. Opérations élémentaires.	
<u>Acquis :</u> Au bout de cette partie l'étudiant doit : - reconnaître les différentes composantes d'un ordinateur. - connaître de façon générique les nouvelles architectures physiques, les nouvelles technologies et les différents types de systèmes d'exploitation (Windows, Linux, Android, IOS ...). - Savoir représenter un nombre dans une base b et convertir d'une base à l'autre.		
PARTIE II (18h) Algorithmique et programmation	Chapitre III: Eléments d'algorithme 1. Notion d'algorithme. 2. Opérations élémentaires : affectation, entrée/sortie. 3. Structures conditionnelles. 4. Structures itératives. 5. Notion de coût d'un algorithme et classes de complexité. <u>Travaux Dirigés :</u> Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.	8h
	Chapitre IV: Environnement de développement Python 3 - Historique et raisons du choix du langage. - Mode interactif, mode Script, Aide en ligne. - Types élémentaires (classes int, str, float, bool, complex). - Opérations élémentaires sur les différents types élémentaires (approche classique/approche orientée objet).	10h

	– Notion de bibliothèque et import des packages prédéfinis (fonctions de bibliothèque). – Types composés : les types mutables (listes, dictionnaires, ensembles et array) et non mutables (tuples et chaînes). – Instructions élémentaires. – Structures conditionnelles. – Structures itératives. <u>Travaux Dirigés :</u> Instructions de calculs (opérations arithmétiques, calculs avec import de fonctions prédéfinis,...) en mode interactif (mode console). Ecrire et exécuter des programmes (utilisant des instructions élémentaires, des structures conditionnelles et des structures itératives) en mode script. Manipulation des types mutables et non mutables.	
<u>Acquis :</u> Maîtriser l'environnement Python. Connaître l'allocation dynamique de la mémoire. Savoir différencier entre les types mutables et non mutables en important le module copy. Savoir calculer le coût d'un algorithme et différencier les classes de complexité (linéaire, quadratique, logarithmique, quasi-linéaire, exponentielle...).		
PARTIE III (4h) Programmation modulaire	Chapitre V: Les sous Programmes en algorithmique – Fonctions et procédures. – Passage de paramètres (Entrée, Sortie, E/S). – Variables locales et Variables globales.	4h
	Total Semestre I (28H)	

	SEMESTRE II	
PARTIE III Suite (10 h) Programmation modulaire	Chapitre VI : Les fonctions en Python – Définition de fonctions par : ✓ <i>def</i> ✓ <i>lambda</i> – Variables locales et variables globales. – Notion de fonction locale. – Réutilisation de modules (import de fonctions). – Gestion des erreurs (bloc Try... Except). – Documentation des fonctions. – Coût de fonctions et classes de complexité. <u>Travaux Dirigés (Programmation Python) :</u> Exercices d'Arithmétiques, nombre premier, nombre parfait, nombre amis, calcul de PGCD, PPCM, multiplication égyptienne, recherche de zéro d'une fonction par dichotomie, algorithme de Newton...	6h
	Chapitre VII : La Récursivité Définition de la récursivité. Avantages et inconvénients de la récursivité (mémoire et temps de calcul). <u>Travaux Dirigés:</u> Suites récurrentes, exponentiation rapide, algorithme d'Euclide, fractales...	4h
<u>Acquis :</u> Savoir écrire un programme en python itératif et/ou récursif. Maîtriser le passage de paramètres. Connaître la notion de critère d'arrêt et d'appel récursif.		

PARTIE IV (8h) Les itérables et algorithmes de tri	Chapitre VIII : Manipulation des itérables en Python – Les méthodes de recherche (liste, chaîne de caractères ...). – Les Algorithmes de tri <u>Travaux Dirigés (Programmation Python) :</u> Applications avec étude des coûts.	8h
<u>Acquis :</u> Savoir manipuler les conteneurs itérables sous python. Maîtriser les algorithmes de recherches et de tri (itératifs / récursifs) avec leurs coûts.		
PARTIE VI (10h) Manipulation des fichiers et Simulation Numérique	Chapitre IX : Manipulation des fichiers Python – Ouverture et fermeture d'un fichier (texte/binaire). – Lecture et écriture dans un fichier texte et image. Chapitre X : Simulation numérique – Utiliser les classe array et ndarray de la bibliothèque numpy et l'ensemble de fonctions d'algèbre linéaire – Simulation d'expériences et traçage de courbes (matplotlib). – Résolution d'équations différentielles du premier ordre (méthode d'Euler) (scipy). – Méthodes de recherche du zéro d'une fonction (Méthode Newton, Méthode dichotomique, ...). – Méthodes d'intégrations (Méthode des rectangles, Méthode des trapèzes,...) (scipy).	4h 6h
<u>Acquis :</u> Savoir manipuler les fichiers avec Python : récupérer et/ou stocker des données depuis des fichiers pour simulation numérique. Connaitre les principales bibliothèques numériques numpy, scipy et matplotlib.		

Savoir résoudre des problèmes scientifiques avec Python.

Total Semestre II (28 H)

Programme de la deuxième Année

SEMESTRE I

Titre des chapitres & contenu

*Charge
Horaire
approximative*

SEMESTRE 1

PARTIE I
(8h)

Rappel et
Structures de
données avancées

Chapitre 0 : Rappel général

- Programmation Python.
- Syntaxe et types de base.

Travaux Dirigés:

Exercices extraits de concours.

Chapitre I: Structures de données avancées

- Notion de Pile.
- Notion de File.

Travaux Dirigés:

Modélisation avec les listes sous Python.
Notation post fixée, expression bien
parenthésée.

4h

4h

Acquis :

Savoir modéliser les piles et les files sous python au moyen des listes.

PARTIE II (8h) Programmation Orientée Objet	Chapitre II: Approche orientée objet et Programmation avec Python – Objet. – Classe (Attributs, méthodes, constructeur/ destructeur ...). – Encapsulation. – Héritage. <u>Travaux dirigés:</u> Représentation des formes géométriques (droite, carré, triangle, etc.). Jeu de carte. Etc.	8h
<u>Acquis :</u> Savoir créer et instancier des classes. Savoir programmer en utilisant la notion objet (attributs et méthodes) Connaître la notion d'héritage		
PARTIE II (12h) Les bases de données	Chapitre III: Introduction aux bases de données 1. Limite des fichiers 2. Notions de bases de données (définition) 3. Les systèmes de gestion de base de données – Définition. – Objectifs. 4. Architecture des SGBD : – Architecture client/ serveur – Architecture trois-tiers 5. Modèle de données – Le modèle relationnel : l'algèbre relationnelle La relation : Schéma de la relation (Attributs et contraintes d'intégrité).	6h

	Operations unaires: projection, sélection. Opérations binaires (ensemblistes): intersection; union; jointure; différence. Chapitre IV: Passage à la pratique (module SQLite3 de Python) – Création d'une base. – Création de tables (schéma de la table, alimentation). – Langage SQL : manipulation des données - Projection - Sélection - Opérateurs SQL - Clauses (<i>fonctions d'agréations, having, order by, group by, etc.</i>) - Union, intersection, différence, jointure <u>Travaux Dirigés :</u> Requêtes simples et imbriquées.	6h
Acquis : Connaître ce qu'est une base de données un système de gestion de base de données Savoir créer une base depuis Python Savoir répondre à des requêtes en langage algébrique et langage SQL		
Total Semestre I (28 H)		

SEMESTRE II		
PARTIE III (22h) Simulation numérique	Thèmes à aborder: – Algèbre linéaire: Calcul matriciel, méthode de pivot de Gauss, Décomposition LU – Cryptographie: Méthode Hill, méthode RSA, codage de Hamming ... – Traitement d'image: Compression Dilation – Problèmes d'interpolations : Interpolation de Lagrange – Programmation Orientée Objet et interfaces graphiques	22h
Acquis : L'étudiant doit être capable de résoudre des problèmes liés aux mathématiques, aux sciences physiques, ou n'importe quel autre domaine cité ci-haut.		

Programme de la première Année

Filière BG

Ce programme a été élaboré, sur la base du contenu et non pas sur la répartition des séances.

SEMESTRE I

Titre des chapitres & contenu		Charge Horaire Approximative
PARTIE I (6 h) Introduction Générale	Chapitre I : Architecture matérielle et logicielle 1. Architecture d'un ordinateur Mémoires. Microprocesseur. Périphériques. Canal de communication (bus). Démonstration / Démontage d'un PC de bureau (repérage et changements de certains composants, etc.). 2. Les systèmes d'exploitation Notion de système d'exploitation (avec des exemples de systèmes). Le multi tâche. Identification des utilisateurs et contrôle d'accès. Système de fichiers.	2h
	Chapitre II : Système de numération 1. Représentation des nombres (naturels, relatifs et réels) dans une base b (binaire, octale, Hexadécimale ...). 2. Transcodage : Passage d'une base à l'autre. 3. Opérations élémentaires sur les nombres binaires. 4. Limites de la représentation (erreurs d'arrondi et de débordement de mémoire).	4h

	<u>Travaux Dirigés :</u> Représentation des nombres dans une base b. Passage d'une base à l'autre. Opérations élémentaires.	
<u>Acquis :</u> Au bout de cette partie l'étudiant doit : – reconnaître les différentes composantes d'un ordinateur. – connaître de façon générique les nouvelles architectures physiques, les nouvelles technologies et les différents types de système d'exploitation (Windows, Linux, Android, IOS ...). – représenter un nombre dans une base b.		
PARTIE II (18h) Algorithmique et programmation	Chapitre III: Eléments d'algorithmique 1. Notion d'algorithme. 2. Opérations élémentaires : affectation, entrée/sortie. 3. Structures conditionnelles. 4. Structures itératives. 5. Notion de coût d'un algorithme et classes de complexité. <u>Travaux Dirigés :</u> Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.	8h
	Chapitre IV: Environnement de développement Python3 – Historique et raisons du choix du langage. – Mode interactif, mode Script, Aide en ligne. – Types élémentaires (classes int, str, float, bool, complex). – Opérations élémentaires sur les différents types élémentaires (approche classique/approche orientée objet). – Notion de bibliothèque et import des packages prédéfinis (fonctions de bibliothèque). – Types composés : les types mutables (listes, dictionnaires, ensembles et array) et non	10h

	mutables (tuples et chaînes). – Instructions élémentaires. – Structures conditionnelles. – Structures itératives. <u>Travaux Dirigés :</u> Instructions de calculs (opérations arithmétiques, calculs avec import de fonctions prédéfinis,...) en mode interactif (mode console). Ecrire et exécuter des programmes (utilisant des instructions élémentaires, des structures conditionnelles et des structures itératives) en mode script. Manipulation des types mutables et non mutables.	
<u>Acquis :</u> Maîtriser l'environnement Python. Connaître l'allocation dynamique de la mémoire. Savoir différencier entre les types mutables et non mutables en important le module copy. Savoir calculer le coût d'un algorithme et différencier les classes de complexité (linéaire, quadratique, logarithmique, quasi-linéaire, exponentielle...).		
PARTIE III (4h) Programmation modulaire	Chapitre V: Les sous Programmes en algorithmique – Fonctions et procédures. – Passage de paramètres (Entrée, Sortie, E/S). – Variables locales et Variables globales.	4h
	Total Semestre I (28H)	

	SEMESTRE II	
PARTIE III Suite (8 h) Programmation modulaire	Chapitre VI : Les fonctions en Python – Définition de fonctions par : ✓ <i>def</i> ✓ <i>lambda</i> – Variables locales et variables globales. – Notion de fonction locale. – Réutilisation de modules (import de fonctions). – Gestion des erreurs (bloc Try... Except). – Documentation des fonctions. – Coût de fonctions et classes de complexité. <u>Travaux Dirigés (Python) :</u> Exercices d'Arithmétiques, nombre premier, nombre parfait, nombre amis, calcul de PGCD, PPCM, multiplication égyptienne, recherche de zéro d'une fonction par dichotomie, algorithme de Newton...	8h
<u>Acquis :</u> Savoir écrire un programme en python. Maîtriser le passage de paramètres.		
PARTIE IV (10h) Les itérables et algorithmes de tri	Chapitre VII : Les itérables – Les méthodes de recherche (liste, array, chaîne de caractères ...). – Les Algorithmes de tri (sélection, insertion, à bulles...). <u>Travaux Dirigés (Programmation Python) :</u> Applications avec étude des coûts.	10h
<u>Acquis :</u> Savoir manipuler les tableaux en algorithmique et en python. Connaître les algorithmes de recherches et de tri avec leurs coûts.		

Programme de la deuxième Année BG

SEMESTRE I

Titre des chapitres & contenu		Charge Horaire approximative
PARTIE I (8h) Rappel et Structures de données avancées	Chapitre 0 : Rappel général – Programmation Python. – Syntaxe et types de base. – Les tableaux. <u>Travaux Dirigés:</u> Exercices extraits de concours.	8h
<u>Acquis :</u> Savoir modéliser les enregistrements, les piles et les files sous python.		
PARTIE II (20h) Les bases de données	Chapitre I: Introduction aux bases de données 1. Limites des fichiers 2. Notions de bases de données (définition) 3. Les systèmes de gestion de base de données – Définition. – Objectifs. 4. Architectures des SGBD : – Architecture client/ serveur – Architecture trois-tiers 5. Modèle de données – Le modèle relationnel : l'algèbre relationnelle La relation : Schéma de la relation (Attributs et contraintes d'intégrité).	10h

	Operations unaires: projection, sélection. Opérations binaires (ensemblistes): intersection; union; jointure; différence. Chapitre II: Passage à la pratique (module SQLite de Python) – Création d'une base. – Création de tables (schéma de la table, alimentation). – Langage SQL : manipulation des données - Projection - Sélection - Opérateurs SQL - Clauses (<i>fonctions d'agrégations, having, order by, group by, etc.</i>) - Union, intersection, différence, jointure <u>Travaux Dirigés :</u> Requêtes simples et imbriquées.	10h
Acquis : Connaître ce qu'est une base de données un système de gestion de base de données Savoir créer et alimenter une base depuis Python Savoir répondre à des requêtes en langage algébrique et langage SQL		
SEMESTRE II		
PARTIE III (22h) Simulation numérique	Thèmes à aborder: – Traitement d'image: Compression Dilation – Biologie : Applications liées à la bioinformatique. La transpiration : Estimer la surface d'une forme irrégulière (feuille). Calculer le déficit hydrique par la feuille	22h

	et la vitesse de transpiration. – Géologie : Simulation numérique de la déformation des matériaux en utilisant un modèle (ANSYS).	
<u>Acquis :</u> Savoir résoudre des problèmes biologique et géologique à l'aide de l'outil informatique		